M. MEIBOMII,

CONSILIARII REGII,

DE

PROPORTIONIBUS DIALOGUS.

AD

SERENISSIMUM PRINCIPEM,

FRIDERICUM III,

DANIÆ, NORVEGIÆ, VANDALORUM, GOTTHORUMQUE REGEM, &c.

ΞΥΝ ΤΩ͂ ΘΕΩ͂ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΟΥΝΤΙ
ΠΑΣ ΣΟΦΟΣ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ.

HAFNIÆ,

Typis MELCHIORIS MARTZANI,

cIↄ Iↄc LV.

SERENISSIME REX,

SUmmam naturæ varietatem ac ſolertiam conſideranti mihi illud ſemper admirabile viſum eſt, quod, quæcunque ipſius leges ac rationes innotuerunt, non uno quodam feliciore ſeculo, ſed variis, inventæ ſint; admirabilius autem, quod paucæ adeo gentes inveniendis illis, interdum ratiocinando, ſæpius caſu, ingeniorum ſuorum felicitatem orbi commendaverint. Quod utrumque abſque divina quadam providentia eveniſſe nequit. Primum enim Deus voluiſſe videtur, ut mundi conditi certum hominibus argumentum præberet rerum paulatim inventarum ſeries: alterum, ut manifeſtis gratiæ ſuæ ſignis omnes gentes, tam quæ in-

ventis aut olim floruére, aut nunc feliciter fruuntur, quàm quæ nullam humanæ vitæ inſignem utilitatem attulére, ad omnium rerum contemplationem, adeoque ad cultum ipſius ac venerationem, excitarentur. Quamvis enim Deus omnes homines clementiæ ſuæ radiis, rectis alios, alios obliquis, illuſtrarit; eoſdem tamen difficultatum quibuſdam quaſi nebulis, majoribus aut minoribus, urgeri voluit, ut & ſui deſiderium in illorum animis accenderet, & in propulſandis naturæ ſuæ adverſis acueret induſtriam. Itaque cum naturam Deus, primus motor, ita fabricaſſet, ut motu omnia gauderent, illiuſque æquabilitate diviniora quæque cenſerentur; hominem binis diverſis rebus, anima & corpore, conſtantem, binis quoque exercitiis occupari voluit, ratiocinando & agendo. Hoc quippe divinam mentem inſpexiſſe putandum, ut, cum majeſtatem ſuam ac

potentiam in conſtituenda totius mundi harmonia demonſtraſſet, præſtantius aliqvod animal, hominem, fingeret, qui agendi libertatem nactus, ratiocinando ineffabilem artificis ſapientiam ſtupere cogeretur. Uti enim inſignis ſtatuarius, qui corporis proportiones omnes obſervando, vivam ſtatuam formaſſe videri poſsit, majori ſibi gloriæ ducit, ſi ab uno ſapiente, quàm ſi ab innumerabili & indocto vulgo, artificium ipſius celebretur; ſic immenſus ille naturæ artifex, qui ſtupendam univerſi harmoniam æterna lege fabricavit, ſummum gloriæ ſuæ apicem in humanis conſecutus videtur, ſi à doctis, & cum ratione ipſius opera ſtupeſcentibus adoretur. Hinc autem futurum erat, ut poſtquam omnia ſapienter à Deo conſtituta homo crederet, felicitatem ſuam, quæ in animæ ac corporis beata ſocietate conſiſtit, ſapientia in primis ac prudentia, quæ ex

cognita univerſi harmonia ac proportione oriuntur, comparandam cenſeret. In hoc igitur utroque ſummo nobis ſtudio elaborandum, ut cogitatione multa ac rerum uſu animam exercendo, naturæ rationes ac proportiones adſequamur; vitam autem noſtram, quàm fieri poteſt maxime, ea ratione ac harmonia, quam natura monſtravit, prudenter conſtituamus. Nihil autem divinius in natura obſervatur, nihil pulchrius, quàm ratio rerum omnium ac proportio; cujus principium, & medium, ac finis Deus ipſe eſt, qui in nihili ratione conſideratur. quippe virtutis augmentum æque ignorans ac defectum in ſumma bonorum omnium æqualitate, immutabilis, æquabili motu cuncta impellit. Cætera verò omnia, divina atque humana, quæ in utramque partem varietatem induerunt, eò præſtantiora cenſentur, quò à ſimpliciſsima illa ratione propius ab-

ſunt. Quæ quidem quàm concinnè de tota rerum natura pronuncientur, nemo, niſi qui perceptis proportionum elementis, DEUM ſemper menſurantem conſideraverit, judicare poteſt. In tradendis autem illis elementis; quamquam divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, & quotquot unquam Pythagorici floruére, hîc deſudarunt; primus omnem eruditam vetuſtatem, quantum ex ſcriptis illius ſcitur, ingenti molimine, quod præfiſcini dixerim, ſuperavi. Atque hoc erudito orbi examinandum propoſiturus, tibi, SERENISSIME REX, DOMINE CLEMENTISSIME, hunc librum humillime offerre debui: qui non tantùm benignitate tua, ſed etiam curioſa inquiſitione, & ſapiente diffidentia; ut qui Mathematicarum diſciplinarum, atque in primis Geometriæ certitudinem perſpectam habes; ad edendum illum me animaſti. Sed & tuo exemplo omnes ad

cognoſcendam hanc de proportionibus doctrinam incitabis; qui artes ac ſcientias fovendo, virtutem omnem æſtimando, non tantùm ſubditos tuos, ſed univerſum orbem, ad præclara quæque, & eruenda naturæ myſteria, hortaris: qui pius, juſtus, fortis, vitâ tuâ conſonantiſsimâ ad eundem concentum ſubditorum animos impellis. Itaque, cum omnes Rege optimo glorientur, Deumque ſupplices orent, ut eodem vitæ tenore, felicitate autem maxima, conſtanter Regna tua animes; futurum ſpero, ut non tantùm Arctous orbis, ſed quotquot ubique terrarum homines cum ratione vivunt, mecum judicent, virtutis tuæ rationem eſſe ineffabilem.

SACRÆ MAJESTATI
TUÆ

devotiſſimus ac
fideliſſimus

M. Meibomius.

Præfatio ad Lectorem.

QUod orbis literatus gaudeat, poſteritas grata memoria recordetur, primi novas Geometricarum rationum leges in natura deteximus, & falſas propoſitiones in eo libro invenimus, quem ultimæ antiquitatis divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, ex Ægyptiorum & Patriarcharum inventis condiderunt; omnium autem ſeculorum præcipui philoſophi ac ſapientes legendo examinarunt. Voluit mundi conditor, ut Chriſtophorus Columbus, cum ſæpius ante de terræ rotunditate dubitatum eſſet, ex flantium ſtato tempore ventorum experimentis ratiocinando, novas terras quærendas ſuſciperet: ſed & idem omnis naturæ, certa ratione compaginatæ architectus, homini admirandis harmonicarum rationum legibus ad univerſarum rerum rationes contemplandas abducto, non novas terras, omni divitiarum genere abundantes, non barbaros homines; ſed novas rationum Geometricarum leges, quibus in omnium rerum harmonia concinnanda Deus uſus eſt, & omnis ſapiens, Dei adſecla, in humanarum rerum harmonia componenda, utetur, primo monſtravit, patefecit. Quod ſi vel tanto minus inventum noſtrum cenſeretur, quanto majus eſt falſum inveniſſe, quod omnes ſapientes verum credebant; quàm novi aliquid in eo reperiſſe, de quo multi ante dubitarant; tamen & Deo, Optimo, Maximo, humillimas gratias agere deberem, qui ad aliquam in natura fundatam veritatem, ratiocinando inveniendam, ingenium ſuffecit; & diſciplinis Mathematicis gratulari, quod certiora in poſterum tradere poſſint. Ad hæc autem examinanda antequam eruditus lector accedat, de quibuſdam eſt monendus, quæ tam inventionem ipſam, quàm alia quædam concernunt. Inventionis igitur occaſionem præbuit Euclidis liber de Canonis Sectione, quem anno cIↄ Iↄ C XLIX, menſe Novembri, typographo excudendum dederam. In primo illius theoremate, quod noſtra Muſicorum editio habet paginâ 24; Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον, δὶς συντεθὲν, ποιῇ τι διάστημα, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται. Si intervallum multiplum, bis compoſitum, fecerit aliquod intervallum, etiam illud erit multiplum: *verbum Græcum* συντεθὲν, compoſitum *Latinis, inde mihi ſcrupulum injiciebat, quod, cum in adoleſcentia Geometriæ operam navaſſem, recordarer, Clavium adpendice ad Euclidis Elementum nonum,*

multis probare, compoſitionem hanc eſſe multiplicationem. ideoque hæc verba, δὶς συντεθὲν, bis multiplicatum *vertenda cenſebam. Hoc cum ſollicite mecum expenderem, qui religioſi interpretis munere in cultiſſima veterum ſcientia defungi ſemper optâram, altius hæc inquirenda ſuſcepi; etiam ea de cauſa, quod ad Clavii ſubtilitates illas, quas ad Vti libri Xmum definitionem, ad VIti quintam, & illa adpendice, expoſuit, nulla ingenii vi in adoleſcentia penetrare potuiſſem. Illo autem tempore tot locorum in deſperatis auctoribus reſtitutione, quaſi perpetuis victoriis, animatus, nihil tam arduum, nihil ita intricatum in ſcientiis, quæ quidem ratione aliqua conſtituta eſſent, inveniri arbitrabar, ut, ſi ingenii nervos contendere vellem, explicatum illud dare diffiderem. Cum itaque circa veſperam profundioribus cogitationibus me totum dediſſem, ut à naturæ principiis rationum contemplationem arceſſerem, duarum horarum ſpatio illius doctrinæ fundamenta excogitavi: in quibus deinde examinandis integro quinquennio fui occupatus. Euclidi tamen, quem primum editum, ultimum notis illuſtravi, eo loco diſſertationem de hac doctrina attexere decreveram, quo erat inventa: quamvis majorem occaſionem præberet Nicomachus in Harmonicis pag. 24. v. 30. qui ex octava propoſitione Vti Elementorum Euclidis, duplam rationem ratione ſubdupla, quam dimidiam vocat, longe majorem ſtatuit. Ita enim loquitur:* κακῶς γὰρ οἴονται, οἱ νομίζοντες διαφορὰν καὶ σχέσιν τὸ αὐτὸ εἶναι. ἰδοὺ γὰρ τὰ δύο πρὸς τὸ ἓν, διαφορὰν μὲν ἔχει τὴν αὐτὴν, ἣν ἓν πρὸς δύο· σχέσιν δὲ οὐ τὴν αὐτήν. τὰ μὲν γὰρ δύο, διπλάσια· τὸ δὲ ἓν, ἥμισυ. Male enim opinantur quicunque putant idem eſſe differentiam & relationem. Ecce enim duo ad unum, differentiam quidem habent eandem, quam unum ad duo; at non eandem rationem. Namque duo unius dupla ſunt; unum verò, dimidium eſt duorum. *Ultima verba liquet intelligenda eſſe ac ſi ita legerentur :* τὰ μὲν γὰρ δύο πρὸς τὸ ἓν διπλάσιον λόγον ἔχει τὸ δὲ ἓν πρὸς τὰ δύο, ἥμισυν. Binarius enim ad unitatem duplam rationem habet; unitas autem ad binarium, dimidiam. *quomodo Theonem Smyrnæum locutum notavi pag. 167. Illud autem conſilium propterea mutavi, quod à paucis hæc ibi lectum iri prævidere poſſem. In notis tamen ad Gaudentium pag. 37. eam loquendi formulam ex nova hac doctrina uſurpavi, quam ex veterum ſententia acutus Geometra falſitatis damnaſſet. Cum poſtea majus otium in Suedia nactus eſſem, anni cIↄ IↄC LIII hieme, dialogi forma*

conſcripſi quæcunque huc pertinerent. Quam ſcribendi rationem ſi quis in Mathematicis non ferendam putet, illum his perlectis aliter judicaturum confido. Infinitis enim altercationibus anſam præcidi, dum præcipuis argumentis, quæ contra adferri poterant, reſpondi: multa etiam, quæ in lectoris animo ſubnata fuiſſent, diligenti explicatione extirpavi. Præterea principia quædam Geometriæ convellere ſuſcepi; quod abſque longiore diſputatione fieri non poterat. Breviter autem & preſſe omnia conceperam, Heracliti monitum multis locis ſecutus, ut ſciolum vulgus etiam intelligendi difficultate ab his arcerem. Sed hanc ſententiam deinde mutavi, multis interpolatis, & late explicatis, quæ ad intelligendam doctrinam ipſam pertinere viderentur. Ut tamen ſciolos torquerem, multa, inprimis quæ de miſtis concinne admodum & jucunde excogitaram, omiſi. Cætera, quæ ex auctoribus, antiquis & junioribus, etiam ſacris, illuſtrandi gratia, adduci poterant, quod nihil ad ſcopum facerent, præterii. Quod ſi vera hæc lector candidus & eruditus judicaverit, illa unà cum quinto Elementorum libro ex noſtra editione, Græce & Latine, proferemus: ſin falſa; quod quidem judicium contra quinquennale examen magno molimine intercedet; nimia jam opera & me, & lectorem, fatigavi. Hoc autem maxime optarem, tam mea, quam lectoris gratia, qui ad hæc legenda & examinanda accedet, ut, antequam cenſoria virgula quidquam damnare ſuſcipiat, exempla hujus novæ doctrinæ, quæ in Harmonicis natura monſtravit, probe perpendat. Illorum enim ignoratione recentiorum errores ſuccreverunt. Inſtrumentum autem, quod monochordum vocatur; quamvis pluribus chordis contendi poſſit; facili negotio ab artifice paratur, nec magno admodum in præcipuarum rationum partes dividitur: niſi canonem, ſeu regulam, quod veteribus in uſu erat, ita dividere libeat; qui, ejuſdem tenſionis chordas omnes longitudine æquans, ſingulis ſupponi poſſit. De dividendo autem illo canone brevis ille & nervoſus Euclidis libellus, quem Canonis Sectionem inſcripſit, inter cæteros Muſicos noſtros accuratè editus extat. In notis quoque ad Ariſtidem Quintilianum pag. 312. Geometricè & Arithmeticè diviſum canonem tanta diligentia exhibui, ut nihil amplius ad intelligenda ea requiri poſſit. Hoc igitur inſtrumento; etiam Pythagoræ ſententia, qui auditores ſuos monochordo uti juſſit; acutus lector adjutus; expenſis quoque locis illis, quos ex antiquis auctoribus produxi; verius & felicius de his judicabit. Cæterum illud adfirmare auſim, apud veteres nihil reperiri,

quod quidem editum ſit, aut ex MSS. noſtris haberi potuerit; quod non legerim, & ſevera cura examinarim. In Aſclepio autem evolvendo; cujus commentarium ad II^dum librum Arithmeticæ Introductionis Nicomachi, ubi de rationum compoſitione agitur, perlegere averem; lacuna magna ſum deluſus, quam nullo ſigno meus codex notatam habet. Aſclepii Tralliani liber II ita incipit: Ἐνταῦθα μέλλει δεῖξαι, ὅτι ἡ ἰσότης στοιχεῖόν ἐστι τοῦ πρός τι ποσοῦ· ἤτοι τῆς ἀνισότητος. *Duobus poſt hoc principium foliis, largius exaratis, hæc ſunt verba:* δεῖ οὖν παραδοῦναι ἡμῖν μέθοδον καὶ τέχνην τινὰ, δι᾽ ἧς ἂν εὑρίσκωμεν δ´ ἡμιολίους, ἢ ε´ ἐπιτρίτους ἁπλαίσως, καὶ μὴ ἰδιωτικῶς· ἤτοι ἀμεθόδως καὶ ἀτέχνως. ἐπιχειρῶμεν τοῦτο ποιεῖν μετρία ἀναλογίας ἐθεώρησαν οἱ νεώτεροι. τίνας δὲ ἐν μουσικῇ. καὶ τίνας ἐν ἀριθμητικῇ. μέλλει οὖν ἐνταῦθα διαλιπεῖν ἔτι λέγειν περὶ τοῦ πρός τι ποσοῦ. *Quæ per mutilum verbum* μετρία *nulla ratione cohærere ex antecedentibus & conſequentibus planum eſt. Deſunt autem quæ ad Nicomachum editum à pagina 40. v. 20. uſque ad paginam 44. v. 1. erat dicturus. Si quis exemplar magis integrum nactus hæc ſuppleret, rem gratam faceret. Extat autem hic Aſclepius cum in aliis bibliothecis, tum in celeberrima Medicéa, ubi pluteo LVIII, codice XXIX, in quarto, ut vocant, inter alia ſcripta reperitur. Jamblichus; cujus operum inſignes codices eadem bibliotheca habet, III & XXIX, pluteo LXXXVI; num de rationum compoſitione ad hunc Nicomachi locum quædam commentatus ſit, videri vellem. Egregiam operam diſciplinis Mathematicis navaret, ſi quis Nicomachi Arithmeticam Introductionem, ſua & Boëthii, & ſi extaret, Apuleji Madaurenſis, verſionibus adornatam, à Jamblicho autem & Aſclepio explicatam, Græce & Latine ederet. Quanti hunc Pythagoricum antiqui fecerint, ex tot verſionibus & commentariis, quæ in Arithmetica ipſius & Muſica conſcripta ſunt, conſtare poteſt. Porro legi quoque Porphyrii commentarium in Harmonica Ptolemæi, ubi de rationibus non pauca habentur. Nicephorum, quem in eadem Harmonica ſcripſiſſe ferunt, videre non contigit. Inter alios quoque legere optarem Adraſti Peripatetici Harmonicorum libros tres, quos in Nova MSS. Bibliotheca vir clariſſimus, Philippus Labbeus, extare dicit in bibliotheca Cardinalis à S^to Angelo, quæ nunc eſt Cardinalis Farneſii fratris. Autorem ex quibuſdam locis notum auro redimere vellem. Recentiorum commentarios non admodum ſolicite conquiſivi, quod Clavio lecto pleroſque omnes me legiſſe ſcirem. Fuſiſſime enim ad Euclidem*

de proportionibus commentando non tantùm Hieronymum Cardanum; qui in Arithmetica ſua, & Opere de Proportionibus hæc tractavit; & Volumnium Rodulphum Spoletanum, ad ſua confirmanda adduxit; ſed etiam aliorum opiniones refutavit. Volumnii verò tractatus de proportione proportionum, niſi meliora habeat quàm quæ ex ipſo Clavius protulit, Voluſii annalibus inſertus potius periiſſet, quàm ut Mathematicos in erroribus ſuis confirmaret. Nec poſtea quidquam novi de his prodiiſſe, ultimus ſcriptor, Gregorius à Sto Vincentio, qui hoc alias monuiſſet, confirmare poſſit. Hujus autem errores, quod plane inſignes ſunt, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonſtrandos duxi, ut omnes viderent in circuli quadratura perficienda non plus novi quam falſi ab ipſo eſſe repertum. Enimvero ab inventa Matheſios tempore nullum fuiſſe puto, qui plus centum & triginta falſas propoſitiones ex uno erroneo principio deduxiſſet. Gratiam igitur à Mathematicis me initurum credidi, ſi quadraturam illam ab ipſo fundamento everterem. Cæterum erroris illius de rationum compoſitione, & multiplicatione, primum auctorem ſtatui Theonem Alexandrinum, quod ipſius verba illum ſtabilire viderentur. Euclidem quoque auctorem feci definitionis quintæ libri ſexti, quamvis ex eo tempore, quo tot incommodis laborare mihi viſa eſt, Euclide indignam judicarim. Sed hac opinione mea lectorem turbare nolui. Adſtipulatur mihi Euclides Arabicus; ex quo etiam Campani verſio prodiit; qui hanc definitionem non habet; quod Arabs interpres in hujuſmodi vetuſtum ex genuina Euclidis editione exemplar inciderit, cum nondum iſta adſuta eſſet. Nec Eutocii me movet auctoritas, qui Euclidi illam tribuit: longe enim ante ipſius tempora Elementis inſerta eſſe potuit. Juniores itaque ex VIti libri propoſitione XXIII illam effinxerunt: quomodo, quod profecto notabile eſt, Scholiaſtes Vti libri definitionem XV, quam ſequente folio edendam curavi, à Junioribus additam dicit. Uſitatum autem fuit antiquis, ut auctorem corruptum, & multa deſcriptione tandem vitioſum; quod in Mathematicis præcipue evenire potuit, quæ tum ob additas figuras, tum ob literarum notas erroribus ſunt obnoxia; ejuſdem profeſſionis alius accurate recenſeret, & tum ex vetuſtis exemplaribus, tum ex ingenio reſtitueret. Nec raro accidit, ut auctori vel ipſe quædam adderet, vel etiam ex aliis obſcuriora ejus loca illuſtraret. Unde auctoris gloria ſæpe ad emendatorem tranſiit. quod in Euclidis Harmonicis factum eſſe, quæ Cleonidæ, aut Pappi nomen tandem prætulerunt,

alibi monſtravi. Porro de Proportionibus hunc dialogum inſcripſi, nempe Geometricis; quod cæteræ potius Medietates adpellentur. De Rationibus Geometricis inſcripſiſſem, niſi à toto & præſtantiore nomen imponendum fuiſſet. Auctorum autem loca Græce & Latine edenda cenſui, ut veterum dogmata non niſi ex ipſis fontibus haurirentur. Quantum in vertendis illis & emaculandis præſtiterim, illi demum cognoſcent, qui aliorum verſiones inſpexerint. Nam & doctiſſimi quique viri in his interdum hallucinati ſunt, vulgaribus erroribus abrepti. Quam enim turpe eſt, quod Joſ. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis ſummus, ὀρθογώνιον ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, *interpretatus ſit, Clavium, alioſque, etiam doctos viros, ſequendo,* rectangulum ſub AB, BC; *cum vertendum eſſet,* rectangulum ab AB, BC, *nempe* contentum, περιεχόμενον. *quod verbi brevitatis cauſa Mathematici omittunt, ut & plerumque vocabulum,* ὀρθογώνιον, rectangulum. *Sed ad hujuſmodi notanda nunc non deſcendemus. Quod ſi illa, quæ ex antiquis perperam verſa ſunt, etiam à ſolertiſſimo Mathematico, Federico Commandino, Græcæ linguæ mediocriter perito, examinare vellem, rebus Mathematicis non parvam lucem me allaturum ſperarem. Atque hæc præcipua ſunt, quæ de hoc tractatu monenda duxi: ſed alia non pauca habeo, quæ cum ingenuis & eruditis viris communicare vellem. quorum unum atque alterum hîc adponam. Et quidem primo Ignatii locum variis celeberrimorum virorum explicationibus infeliciter tentatum, obiter adducemus. Is eſt in epiſtolæ ad Romanos inſcriptione, ubi hæc ſunt verba:* ἥτις προκάθηται ἐν τόπῳ χωρίου ῥωμαίων. *Hanc lectionem tam Græci codices, quàm veteres duo Latini interpretes confirmant; ut revera adpareat eſſe vetuſtiſſimam. Neque enim* πρώην καὶ χθὲς *imperiti homines, corrumpendis auctorum veris ſcripturis nati ſunt, ſed jam ante mille & amplius annos docti viri conquerebantur,* ὅτι τῶν παλαιῶν βιβλίων ἐπὶ τὸ χεῖρον κινεῖται ἡ γραφή. *Subtiliſſima eſt eorum ſententia, qui de regionibus ſuburbicariis hunc locum accipiunt; ſed durior atque inconcinna. ut certe ineptior mihi videatur Vedelius, qui hoc commode explicari poſſe contendit, quàm Caſaubonus, qui locutionem dixit barbaram. Simpliciter enim ſcripturus fuiſſet,* ἐν χώρᾳ ῥωμαίων προκάθηται. *& regionis locus fuiſſet demonſtrandus. Nec ex Luca adductus locus quidquam probat. Vir eximius, Iſaacus Voſſius, pro* χωρίου *putat legendum* χοροῦ. *maxime quod alter veterum interpretum eò inclinare videatur. verum dubio procul ille*

ſcripſerat chorii, *quod etiam Clariſſ. Uſſerio obſervatum. Inconcinna quoque inde colligeretur ſententia. Poſſum veram lectionem proferre quàm minimâ ſcripturæ immutatione, ſi pro* χωρὶς *ſcribatur* κυρίου. *Quàm enim* κ *&* χ *figurâ ſimiles inter ſe ſint literæ, illis præcipue notum, qui non ſolùm vulgarem typographorum formam conſiderant, ſed etiam vetuſtæ ſcripturæ Græcos codices inſpexére. De literis* υ *&* ω *non opus eſt ut moneam. Romanum itaque epiſcopum* ἐν τόπῳ κυρίου ῥωμαίων προκαθῆσθαι *dicit*, Dei loco Romanis præſidere. *Hanc noſtram lectionem ſimili ejuſdem Ignatii locutione confirmare poſſumus. Ita enim loquitur in epiſtola ad Magneſios:* παραινῶ, ἐν ὁμονοίᾳ θεοῦ σπουδάζετε πάντα πράσσειν, προκαθημένου τοῦ ἐπισκόπου εἰς τόπον θεοῦ, καὶ τῶν πρεσβυτέρων εἰς τόπον συνεδρίου τῶν ἀποστόλων. moneo, in concordia Dei ſtudete omnia operari; præſidente epiſcopo in loco Dei, & presbyteris in loco confeſſionis Apoſtolorum. *Epiſcopus hîc* εἰς τόπον θεοῦ προκάθηται, *ut ibi* ἐκκλησία, *hoc eſt, epiſcopus Romanus, ejus caput,* ἐν τόπῳ κυρίου. *Quid ſimilius dici potuit? Cæterum* ἐν τόπῳ, *&* εἰς τόπον *indifferenter uſurpari, vel leviter in Novi Fœderis phraſi exercitatus novit. quod ex Hebræorum* ב *originem habet. Sed & alium ejuſdem locum hîc reſtituemus. Epiſtola ad Trallianos vetuſtæ Ignatii epiſtolæ legunt,* οἱ καιροὶ παρεμπλέκουσιν Ἰησοῦν Χριστόν. quæ & inquinatis implicat Jeſum Chriſtum. *Voſſius ex recentioribus epiſtolis, in quibus eſt,* καὶ τὸν ἰὸν προσπλέκοντες, *emendat,* οἱ καὶ ἰοῖς παρεμπλέκοντες. *Neſcio an inepte; certe verbo non adeo Græco. Lege vel ſyllabas tantùm colligendo,* οἱ καὶ ῥυπαροῖς ἐμπλέκουσιν. *Alterum, quod hîc adducturus ſum, eſt de Veterum navibus, de quibus nuper diligentiſſime tractavit Joa. Schefferus. In omni autem de navibus illis diſquiſitione duo in primis difficilia ſunt; unum, quomodo intelligendi ſint illi triremium, majorumque navium ordines; alterum, quodnam genus navium fuerit, & hemiolia, & triereмiolia. Utramque hanc difficultatem, quæ ſummos viros hactenus torſerat; Lazarum Bayſium, Joſ. Scaligerum, Cl. Salmaſium, Henricum Savilium, Thomam Rivium; Notis ad Vitruvium, qui Amſtelodami anno* cIↃ IↃc XLIX *editus eſt, nova, ſed brevi admodum explicatione, quod alio loco prolixe hac de re acturus eſſem, primus ſuſtuli. Illarum alteram ſententiam meam, quæ de ordinibus eſt, utcunque etiam tradidit Schefferus, à ſe, ut ſcribit, excogitatam: quamvis abſurdam aliorum ſententiam idem amplexus eſſet in differ-*

tatione quadam, quam antea hac de re ediderat; ut & ipſe ingenue fatetur pag. 92. Salmaſius, qui notas illas, antequam ederentur, legerat, quamvis iis multa ex ſuis placitis labefactari videret, majori tamen veritati, quæ ſine ulla contumelia proponeretur, locum dedit. Nunc Schefferum de illis ſolum, in quibus à veritate in his duobus explicandis aberravit, paucis monebo. Primum igitur non vidit, quo differant verſus & ordo. quamvis, quod mirandum, nec Scaliger, aut Salmaſius idem obſervarint. Verſus autem eſt, ſeries remigum in uno latere æque alte ſedentium; ut, in triremi, ſummorum, ſeu thranitarum verſus plerumque erat remigum L; item zygitarum, ſeu mediorum, verſus L remigum, & totidem infimorum, ſeu thalamitarum. Ordo autem eſt ſeries remigum à ſummo ad imum tendens. Unde primo ordine thranitæ conſidunt, altero zygitæ, tertio thalamitæ. Verſus igitur, Græcis στίχος, ſecundum navis longitudinem ſumitur; ordo, τάξις, ſecundum altitudinem. Multa, ſi hîc locus eſſet, huic ſententiæ confirmandæ adferre poſſem. Sufficit illud, quod ternum ordinem conſurgere *Virgilius dicat. Errat igitur Schefferus pag. 91. v. 21. & aliis locis. Deinde in eo errat, quod pag. 94. in Ariſtophanis verſu explicando ordines ita collocet, ut thranites videat dorſum zygitæ, & hic, dorſum thalamitæ; cum contra ego illos ita diſponam, ut thranitæ dorſum videat zygites, & hujus dorſum thalamites, omnes puppim verſus collocati. Ideoque optimo Ariſtophanis Scholiaſtæ, quem Scaliger, Salmaſius, & cumhis Schefferus, abſque ratione improbant, thranites eſt,* ὁ πρὸς τὴν πρύμναν, puppim verſus, *non,* in puppi, *ſed puppi proximus. Similiter thalamites eſt,* ὁ πρὸς τὴν πρώραν, proram verſus, *magis proram verſus à puppi remotus, quam zygites, & hic magis quàm thranites. Porro unde hemiolia dicta ſit, primus quoque ex Etymologico Magno docui; cujus locum, reſtituto vocabulo* μάχιμον, *ita legi:* οὗ τὸ μάχιμον ἡμιόλιον μέρος ψιλῶν ἐρετῶν ἐστι. cujus pars armata ſeſquialtera eſt nudorum remigum. *hoc eſt, ſi L viros haberet tota hemiolia, horum XX; ab unoquoque latere X; erant ſolùm remiges, remis ſemper incumbentes in ordine inferiori; XXX, cum hoſtis adeſſet, armati. Male Salmaſius in Obſervationibus ad Jus Atticum, pag. 716. & cum illo Schefferus pag. 74. legendum putavit.* ψιλὸν ἐρετῶν. *Præterea non intellexére vocabulum* ἡμιόλιος. *Atque hæc hactenus. Vale lector candide, & inventis, ad DEI gloriam, tuamque ſalutem, feliciter utere. Hafniæ, cIↄ Iↄ C LV. XIV Calendas Martii.*

NOTÆ QUÆDAM. UT ET ERRATA CORRIGENDA.

PAginâ 11. v. 3. particula *tantùm* non excludit numerum, ſi magnitudines illæ ſint rationales.

v.17. *τῶν ἄλλων εἰδῶν τοῦ ποσοῦ.*] Hoc falſum eſſe in ipſo tractatu monſtravi. quippe *magnitudinum* Euclides dixit, ut etiam irrationales quantitates comprehenderet, quæ numeris exprimi nequeunt. Nec ideo id vocabuli adhibere potuit, ut magnitudines ſolùm, non autẽ numeros quoque rationem inter ſe habere ſignificaret. Quod ſi noſtro ſenſu Euclidem eo vocabulo uſum Scholiaſtes denotare voluiſſet, ſcribendum fuiſſet, *τοῦ ἄλλου εἴδους τοῦ ποσοῦ. ut ab altera quoti ſpecie ſepararet.* Neſcio certe quot ſpecies quoti hic Scholiaſtes ſomniarit. Fortaſſe ſoni, pondera, tempora, & aliæ res numeratæ, ipſi ſpecies quoti cenſentur. Duas ſolùm antiqui nominarunt. Ariſtides Quintilianus Muſicæ libro III, pag. 120. *διπλοῦ δὲ ὄντος τοῦ ποσοῦ. cum duplex ſit quantitas*, ſeu potius, *quotitas.* Sic quoque Aſclepius, & alii.

Pag.13. v.2. pro *numeris* ſcribe *rationibus*. & dele verſum 9 & 10.

Pag.14. v.10. ſcribe, *eorundem.* v.23. pro $\frac{17}{6}$ ſcribe, $\frac{17}{11}$.

Pag.16. v.13. Plane ſcribendũ, *τὴν ἔννοιαν ἀποπληρῶσαι.* ex præcedentis vocabuli ultimâ ſyllabâ *αν* male repetitâ hic error natus eſt. nec Græcum verbum eſt *ἀναποπληρῶσαι*.

Pag.17. v.5. ſcribe, Ἥρωνας, Heronas. v.7. delerem particulã *καὶ*. v.34. omnino legendum, *πηλικότης, οὖσα μονάς.*

Pag.19. v.35. plane ſcribendum, *ἀλλ' ἢ τὸ.*

Pag.20. v.24. legendum, *τὰ δύο τέταρτον.* quod etiam interpretando obſervavi.

Pag.21. v.2. addidi *ὅροι.* v.24. addidi *ἔχει.*

Pag.25. Cum hæc ederentur, ad manum non erat Theonis commentarius in Magnã compoſitionem Ptolemæi; ex quo hic locus deſumtus eſt, & Euclidis Elementorum libro VI in Græco exemplari Baſileenſi præfixus. Quoniam igitur ex Euclide hæc edidi, variantes, & plerunque meliores in Theonis commentario, pag. 62. lectiones hîc adponã. v.1. *πολλαπλ.* v.4. hæc verba; *οἷον, διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον.* tanquam ab alio adſcripta, abſunt. v.7. pro his verbis, *καὶ αὐτὸ δεδομένον*, habet, *λόγον.* v.8. ut & 10. 11. 15. abeſt particula *τὸ.* v.10, recte addita particula *τοῦ*, legendo, *τοῦ τοῦ αβ.* v.11. *τουτέστιν* pro *ἤτοι.* v.16. male *τοῦ λόγου.* ibidem abeſt verbũ *ποιεῖ.* ſed ſequente

verſu legitur, πρὸς εζ ποιήσῃ. v.20. τὸ δὲ pro καὶ τό. v.27. ἐστιν pro ἐστί. v.28. ἐπεὶ καὶ pro ἐπειδή. v.34. verba, καὶ ἔσω ταῦτα, deſunt. Pag. 26. v.2. pro ἐστὶ τριπλάσιον, auctius ita recte legitur: τριπλάσιον ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ηβ τοῦ εζ ἐστί τριπλάσιον. καὶ ὅλον. *tripla propter eadem & GB ipſius EF tripla eſt. Ideoque tota.* v.3. ἐστιν. v.5. σύγκειται pro συνῆπται, omiſſo v. 6. verbo συγκείμενος. nec tamen mala ea lectio eſt, quam & ipſe Theo deinde habet v.28. v.7. recte, τοῦ τοῦ αβ πρὸς τὸ γδ λόγου, καὶ τοῦ τοῦ γδ πρὸς εζ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἔλαττον ᾖ ἑκατέρου τῶν αβ, εζ τὸ γδ, τὸ αὐτό. v.24. τοῦ εζ ἥμισυ, recte omiſſo ἐστί. deinde, οἵων ἄρα ἐστί. ſed male, ἴσον. & v.25. male γ pro γδ. v.26. ἡμιόλιον ἔσται. v.28. & pag. 27. v.8. συνῆπται reſcripſi pro συνῆκται, quod uterque perperam habet. v.30. legendū, τοῦ τοῦ αβ. quamvis poſterius uterque omittat. deinde, πρὸς γδ λόγου, καὶ τοῦ τοῦ γδ πρὸς εζ.

Pag. 27. v.3. abeſt ἐστί. v.13. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πλ. intermediis omiſſis. v.15. male, ὡς ὅτι. v. 17. perperam, διαιρεθῇ. ut & ἄκρων pro ἁπλῶν. Deinde, ὁ λοιπός. &, καταλειφθήσεται.

Pag. 28. v.6. vocula ἐφεξῆς eſt inepta. ideoque delenda.

Pag. 29. v. 7. πολλαπλασιασθήτωσαν.

Pag. 30. v. 16. ἐλαχίστοις ſcribendum pro ἐλαχίστῃ. *paucißimis* pro, *minima*. v.25. pro πλεῖον lego πλείω, vel πλείονα.

Pag. 31. v.8. lego, διπλάσιον, ὃν ἔχει πρὸς τὸν δ', τουτέστι. *duplam, quam habet ad IV, hoc eſt, ad ſecundum* (ſcil. terminum.) v.24. pro ἐστὶ ſcriberem ᾖ. v.27. addidi voculam τοῦ.

Pag. 32. v. ult. ſcribe, γεγονέτω.

Pag. 33. v.4. pro πλείους lego πλείω, ſcilicet μεγέθη, vel μέρη. non autem, πλεῖον, ſcil. μέγεθος. v.35. ſcribe, autem.

Pag. 38. v.28. ante ἴσον in Edito exemplari vocabulum διάλημμα inſertum legitur. quod ex margine, in quo forte adſcriptum fuerat, in textum male irrepſit. Similiter verſu ultimo, perperam in Edito legitur, τὸ (ἴσον. pro quo forſan ἴσως ſcriptum fuerat, quod vocabulum ἐπίταγμα excidiſſet.) ἐπίταγμα.

Pag. 39. v.11. vocabulo πολλαπλάσιον Eutocius excludit rationem duplam; quod hoc caſu ſcribendum fuiſſet v.15. τὸ λοιπὸν τὸ ΓΑ ἴσον ἔσται τῷ Δ.

Pag. 40. v.16. ſcribe puncto tranſpoſito. *Propter componenti ergo etiam.* v.27. pro καὶ, vertendo legi ἔσται.

Pag. 42. v.16. pro αζ editus male, τὴν αβγ. v.20. ſcribe, τμήματα

Pag. 43. v. 12. quædam, ut ſuperflua, omiſi. Ita enim codex editus. καὶ ἐπεὶ ἐςὶν, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, ὕτως ἡ θζ πρὸς ζϐ ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εϐζ πρὸς ϐζ, ὕτως ἡ ηζ πρὸς ζδ. ἔςαι καὶ ὡς.

Pag. 44. v. 10. pro θζ editus male κζ. Hunc locum ex Eutocio reſtitui.

Pag. 47. v. 14. editus male, θγ. διπλασιόν ἐςιν ὁ τῦ.

Pag. 48. v. 11. poſt ὁ editus perperam additam habet particulam δὲ. v. 21. pro ὑπὸ male habet ἀπὸ.

Pag. 49. v. 11. editus ὑπὸ.

Pag. 52. v. 21. vocabulo expunčto ſcribendũ: μεῖὰ γὰρ τῦ ἀπὸ τῆς μεῖαξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τῷ. quod vertendo indicavi.

Pag. 53. v. 15. pro ὁ A ἄρα, editus male, ὁ A E.

Pag. 55. v. 24. quæ uncis incluſa ſunt, in Græco exemplari deerant.

Pag. 56. v. 1. & 2. editus τὴν male pro τὸν. v. 7. addo encliticam τε, ut ſit ἔκ τε.

Pag. 57. v. 28. 30. 33. editus τὸν perperam pro τὸ.

Pag. 59. v. 3. editus male κωνικῶν. v. 28. enclitica τε videtur delenda. v. 32. ſcribe, παραλληλόγραμμα, *parallelogramma*.

Pag. 60. v. ult. reponendum, aut ſaltem ſubaudiendum, δεῖ δεῖξαι.

Pag. 61. v. 30. editus perperam, ὡς δε τῦ.

Pag. 63. v. 11. addidi κύϐȣ. explicatius quoque legeretur addito vocabulo, διπλάσιος μέν ἐςιν λόγος ὁ.

Pag. 66. v. 9. legendum videtur, ὃ ταυῖὸν.

Pag. 70. v. 13. ſcribe, *ſuperoctogeſima*.

Pag 76. v. 26. magnitudines.

Pag. 77. v. 13. ſcribe, $\frac{81}{71}$.

Pag. 78. v. 19. neſcio quo errore in Euclidis definitione omiſſa ſint verba, ἐφ' ἑαυῖὰς, *in ſe*, quæ in utraque Græca editione leguntur, hoc modo: πηλικότηῖες ἐφ' ἑαυῖὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, *quantitates inter ſe multiplicata.* Quare non tantùm Eutocius, quod verſu penultimo ſcripſi, ſed & ipſe Euclides; ſi ipſius hæc definitio fuerit; hæc verba addidit. Hoc quoque deinde ſignificavi pag. 95. v. 27.

Pag. 80. v. 2. *ſpectata* pro *ſpectatarum*.

Pag. 84. v. 2. ſcribe *cum* pro *eum*.

Pag. 87. v. 13. ſcribe *quam* pro *quem*.

Pag. 94. v. 25. *exceſſivam* dixi pro *differentialem*. quod nondum id vocabuli eo uſu adhibuiſſem, quo defectivæ rationi opponitur.

Pag. 98. Hac demonſtratione Euclidéam rationes compo-

nendi methodum explicui, præcipue hac de cauſa, quod compoſitæ rationes eadem operatione in duas æquales dividantur. Hoc autem magno uſui in ſequentibus eſſe potuiſſet, ſi ea quæ mihi propoſueram, hoc tractatu explicaſſem. Cæterum explicite monſtrare potuiſſem, rationem ipſius O E ad E M compoſitam eſſe ex rationibus A B, C D. Quoniam enim ductâ magnitudine A in D; aut C in B; quadrata ab A B, C B ſunt in ratione A ad C, item quadrata C B, C D in ratione B ad D. &c.

Pag. 99. v. 3. *monſtrare* dixi, etiam cum Euclide. quamvis uſitatius problema concludat verbo *facere*. Pag. 117. v. 23. ſcribe, Mævii ad Nonium. v. 25. ſcribe, $\frac{9}{6}. \frac{8}{6} | \frac{9}{8}$. Pag. 119. v. 4. propiores. Pag. 121. v. 21. ſubquadruplæ. Pag. 136. v 2. illis. v. 3. omnis. Pag. 146. 9. celeritas, pro celeritatis. Pag 152. v 6. $\frac{14}{5}$ pro $\frac{4}{5}$. Pa. 160. v. 23. conſtituendo pro componendo. Pa. 161. v. 19. nulla. v. 24. me. v. 27. Itaque. v. 29. genus. Pag. 164. v. 7. ſubſeſquialtera. Pag. 167. v. 23. $\frac{1}{64}$ pro $6\frac{1}{4}$. Pag. 171. v. 7. ſcribe, 5 ad 3. v. 11. ſignificare. Pag 191. v. 13. ſcribe, rationem.

Sequentia duo in V. Elementum Scholia, ut omnia Græce & Latine haberentur, hîc adponenda duxi.

Μέρος] Κατὰ μὲν τοὺς πολλοὺς μέρος ἐστὶ τὸ τοῦ ὁμοειδοῦς ἔλαττον· οἷον ὁ γ΄ τοῦ ε΄. κατὰ δὲ τὸν γεωμέτρην, τὸ μετροῦν τὸ μεῖζον ἰσάκις, τουτέστιν, ὅταν τὸ καταλειπόμενον ἴσον ᾖ τῷ καταμετροῦντι· ὅταν δὲ τὸ καταλειπόμενον μὴ ἴσον ᾖ τῷ μετροῦντι, τὸ μετροῦν οὐκ ἔστι μέρος, ἀλλὰ μέρη. οἷον, ὁ γ΄ μετρῶν τὸν ε΄, καταλιμπάνει δύο, ἅπερ οὐκ ἔστιν ἴσα τῷ γ΄. διόπερ τὰ γ΄ οὐκ ἔστιν μέρος τοῦ ε΄, ἀλλὰ μέρη. τρία γὰρ πέμπτα.

Σύνθεσις λόγου] Οἱ νεώτεροι τοῦτον προσέθηκαν τὸν ὅρον. οὐδὲ γὰρ σύνθεσις μεγεθῶν ταυτόν ἐστι τῇ τοῦ λόγου συνθέσει. ἐνταῦθα γὰρ τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου συντεθέμενον, μέγεθος μεγέθει, τὸ ὅλον μέγεθος ποιεῖ συγκείμενον ἐκ μεγεθῶν, ἴσων τοῖς συγκειμένοις. ἡ δὲ τῶν λόγων σύνθεσις ἄλλον ποιεῖ λόγον, ὡς αὐτὸς ἐν τοῖς ἑξῆς ἐρεῖ. λόγος γάρ φησι ἐκ λόγων συγκεῖσθαι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὡς δ᾽ ἐγὼ ἐν τοῖς παλαιοτέροις εὗρον βιβλίοις, τὴν σύνθεσιν ταύτην συνθέντος λόγον λέγει. καὶ γὰρ περὶ (legerem περὶ) τῶν ἐν τοῖς θεωρήμασιν ὁ στοιχειωτής, συνθέντι φησίν. ὅμως καὶ οὕτως κειμένου. πάλιν ἐκ τοῦ συνθέντι σύνθεσις νοεῖται. οἶμαι δὲ κρεῖττον εἶναι, λέγεσθαι σύνθεσιν ὅρων, καὶ μὴ λόγου. ὅρους δὲ λέγω αὐτὰ τὰ ἐκκείμενα μεγέθη, καὶ οὐχὶ τὴν σχέσιν, ἣν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ διαίρεσις, οὐ νοεῖται λόγου διαίρεσις. ὡς φέρε εἰπεῖν, διπλασίου εἰς ἡμιόλιον καὶ ἐπίτριτον ἢ τριπλασίου, εἰς ἡμιόλιον καὶ διπλάσιον. ἀλλὰ διαίρεσις τῶν μεγεθῶν. ἡ γὰρ ὑπεροχὴ τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἑπόμενον θεωρεῖται πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Τεταραγμένη] ὡς ὁ η΄ πρὸς τὸν δ΄, ὁ ς΄ πρὸς τὸν γ΄. ὡς δὲ ὁ δ΄ πρὸς τὴν μονάδα, ὁ κδ΄ πρὸς τὸν ς΄.

PArs] Ex multorum ſententia pars eſt, quod, cum ejuſdem ſpeciei ſit atq; aliud, eo minus eſt; ut ternarius quinarii: at ſecundũ Geometram, quod metitur majus æqualiter, hoc eſt, cũ id quod relinquitur æquale fuerit metienti. Sed cũ id quod relinquitur non fuerit æquale metienti, metiens non eſt pars, ſed partes: ut, ternarius menſurans quinariũ, relinquit binariũ, qui æqualis non eſt ternario. Quare III nõ eſt pars ipſius V, ſed partes; nempe 3 quintæ.

Compoſitio rationis] Juniores hanc definitionem addidére. Neq; enim magnitudinum compoſitio eadẽ eſt quæ compoſitio rationis. Hîc e. antecedens addita conſequenti, magnitudo magnitudini, totã magnitudinẽ facit conſtare ex magnitudinibus, quę æquales ſunt iis quæ adduntur. At rationũ compoſitio aliam facit rationem, ut ipſe poſtea dicet. *Ratio* enim ait, *ex rationibus conſtare*, & cætera. ut autem ego in vetuſtioribus exemplaribus inveni, cõpoſitionem hanc componenti rationẽ vocat. quippe de iis quæ in theorematis hic elementatius doctor monſtrat, componenti inquit. tamen cũ vel ita hæc poſita eſt, rurſus ex componenti compoſitio intelligitur. Melius autem eſſe puto, ut dicatur compoſitio terminorum, non autem rationis. Terminos autẽ dico ipſas expoſitas magnitudines, non autem, quã inter ſe invicem habent, relationẽ. Similiter quoq; diviſio, nõ intelligitur rationis diviſio; exempli gratia, duplæ rationis in ſeſquialterã & ſupertertiã: aut triplæ, in ſeſquialteram & duplã; ſed diviſio magnitudinum. Exceſſus e. antecedentis ſup. conſequentẽ ſpectatur ad ipſam co.

Perturbata] ut VIII ad IV, ita VI ad III. Sed ut IV ad I, ſic XXIV ad VI.

F I N I S.

MARCI MEIBOMII

DIALOGUS DE PROPORTIONIBUS.

Colloquuntur Euclides, Archimedes, Apollonius Pergæus, Pappus, Eutocius, Theo, Hermotimus.

EUCLIDES.

TAntane verò temeritate ac inſolentia mortales ferri poſſunt, ut noſtram quoque quietem nugis ſuis moleſtare ſuſcipiant! niſi novum hunc veri indagandi modum, qui ab uno exemplo latius ſerpere poſsit, ſtatim in ipſo ortu opprimamus, omnes mortalium in literarum ſtudiis rixæ, ac vaniſsima ſæpe ſomnia, & deliria, quæ non tam beatas mentes, quam mortalium animos turbare nata ſunt, ad nos devolventur. ARCHIM. Quid novæ ſollicitudinis, ô Euclide, te hîc adfixum tenet, qui divinis contemplationibus plenus, hunc amœnum campum intrare, aliisq; ſociatus, naturæ invariatas leges, quas in linearum, ſuperficierum ac corporum dimenſionibus, mortalibus pariter atque immortalibus

diſcendas propoſuit, expendere ſoles? Age vero, & ad illud mecum nemus amœniſsimum contende, ex quo huc adventantes vides Apollonium noſtrum, & Pappum, & Eutocium atque Theonem; aliasque mathematicis contemplationibus deditas animas, ut diviniore quodam ſtudiorum noſtrorum argumento oblectemur. EUCL. Vix hoc à me impetrabis, ô divine Archimedes, quod aliud jam volvere, ac deſuetas curas reſumere, iſte me ſollicitet Hermotimus. Quem ſi ſemel admiſerimus, jam de ſtudiis noſtris actum. Nec minores olim nobis turbas mathematici iſti daturi ſunt, quam Plutoni, regi noſtro, & inferis dederunt Theſeus, Hercules, & cætera audaciæ exempla, qui vivi ad nos penetrarunt. Nam non tantum de circuli quadratura, in qua invenienda & eximii quidam mathematici laborarunt, novas & diſtortas demonſtrationes quotidie nobis examinandas deferent; aliisq; difficilioribus problematis moleſti erunt; ſed incredibilem ſciolorum audaciam, in ſcientiarum noſtrarum contemtum natam, quotidie execrabimur. Qui mechanici ſolertes haberi volunt, cum proportionum doctrinam non deguſtarint: qui ſine Geometria, ſine Arithmetica, quibus & divinam mentem in rerum omnium conformatione uſam ſapientes adſerunt, ſolo proportionis circino, ut vocant, armati, inaudita ubique facinora patrant: qui inſtrumenta nova quotidie fabricant: qui Neptuno horrorem incutiunt, ac gentibus exitium minantur, dum naves volare docent. Sic Mathematicas diſciplinas, quas hactenus ἀπλαίςυς καὶ ἀμετακινήτυς, adamantinis fundamentis ſuper-

ſtructas, nec motum, nec caſum vereri, omnium ſeculorum conſenſus judicaverat, vix inter probabiles cenſeri videbis. Quæ enim diſciplina, quæ vel veritatis umbram ſibi adrogare audeat, tam fœdos lapſus experta eſt, quam binis ultimis ſeculis noſtra matheſis. Adeo ut, cum quotidie de hujusmodi rebus ad nos perferatur, argumentis certiſsimis confirmemur, audaciores fieri homines, non ſapientiores. Quis Pythagoran nunc inter mortales æſtimat, quis Platona? Quis ad veram ſapientiam ſevera noſtrorum temporum lege contendit, cum absque mathematicarum ſcientiarum accuratiore notitia ad naturæ arcana penetrare velle, piaculum cenſeretur. Nunc pueris ſapientiam induunt, ut primis ſtatim annis initiati, de omnibus naturæ myſteriis, tanquam myſtæ illius, & ſummi arcanorum ſacerdotes, pronuncient. Priſcis temporibus; cum nondum quotidianis diſputationum febribus adoleſcentes laborarent; multa in diſciplinis noſtris exercitatione robur ingenia adquirebant, ut ad ſublimium rerum indagationem ſufficerent. Cum ingentis gloriæ ſtimulis incitati, tam reges quam ſubditi, ſi inventis quibusdam poſteritati æternam ſui memoriam commendare poſſent, inquirebant; quod ingenium auro tanto præſtantius judicarent, quanto terrenis cœleſtia excellentiora cenſentur. Itaque multi clari viri, & in noſtris ſtudiis exercitati ad nos commeabant; nunc, poſtquam mechanicorum audacia matheſeos compendiariam invenit, vix vicenis annis ſinguli Geometræ ad nos veniunt. Ex iis enim qui ſe mathematicos dicunt, nec milleſimum quemque conſortio

noſtro dignum judicamus. Sed & nos iſti fugiunt, & in abdita loca ſe conferunt, ut propugnacula extruant, & rurſus deſtruant. qui tametſi Siſyphi ſaxo majus volvant, adeo tamen nugis ſuis animantur, ut nihil præclarius ab ullis aliis agi poſſe exiſtiment. Et quidem noſti, quanta experimentorum vanitate tempus conſumant, cum non ratione & legibus Geometricis, ſed caſu veritatem deprehendere conentur. ARCHIM. Nimia vehementia in corruptam ſtudiorum regulam declamas, & ſimul mea quoque vulnera refricas. Quis vero ille, qui novus huc noſtris ſucceſsit ſedibus hoſpes? num Orphea imitaturus, animas ad ſuperas auras educere conatur, teque, ut omnis matheſeos callentiſsimum, ita Muſices arcana doctum, de modis, quos citharæ adtemperare debeat, conſultum venit? EUCL. Nihil minus. noſtra vero quædam Elementa Geometrica, quæ tot ſeculis homines, tanquam immota veritate nixa, pro certiſsimis oraculis habuére, convulſum venit, meque ſollicitat, ut ad ſubverſionem illorum primus ſententiam feram. Nova quædam de Proportionibus inventa, quæ ex Euthymio ſe didiciſſe ait, nobis exponet: illa autem, ſola veritatis indagandæ cupiditate inductum, nobis, ut acerrimis cenſoribus examinanda prius proponere ſe voluiſſe, quam iis adſentiret. ARCHIM. Audax vero illius Euthymii facinus, & inauditum, novo exemplo caſtigandum. Nec tamen propterea tot curis involvi te oportuerat. Ferendæ illæ ſunt, ô Euclide, mortalium injuriæ, & linguæ libertatem ac cenſuræ omnibus concedere, etiam indoctis, debemus. Quid mihi nuper acci-

derit, probe, puto, adhuc meminiſti. Impotenti animo nomini meo inſultarat Joſ. Scaliger, & famam divini Mathematici, quam cum effectis ipſis & operationibus, tum ſcriptis, ſeculorum omnium conſenſu, fueram conſecutus, convellere non dubitarat. Illa inventa mea, quæ doctis omnibus, tanquam alter Prometheus, è cœlo ſuffuratus eſſe credebar, quæ omnibus adorabantur, vir ille, cætera quidem ſummus, ſed in noſtris literis pene infans, qui eruditum illum pulverem vix digito contigerat, traducere cœpit, ac ineptis ſuis inventis poſthabere. Noſti qvanta conſternatione recentes tum Mathematicarum animarum, quæ ad nos pervenerant, nuncios audiverim. Sed vix facinoris audaciam narraverant, cum alii advenirent, qui præſtantiores Mathematicos famam noſtram contra vanos ipſius inſultus ac conatus adſeruiſſe dicerent. Quanto deinde gaudio illis defenſoribus meis, cum ad nos deſcenderent, occurrerim, quanta cum congratulatione illos exceperim, omnes vos, ô præſtantiſſimæ animæ, noſtis, cum etiam in hoc uſque tempus, cum omnium veſtrûm, tum in primis mea conſuetudine delectentur. Nec tamen mea indignatio tanta fuit, ut non doctiſſimo alias homini ignoſcere potuerim, cum in conſpectum noſtrum veniret, & verecunde veniam delicti peteret. Cum enim certum ſit, & notum doctis omnibus, periculoſam æque ac laborioſam eſſe arenam, in qua ſe mathematici exercent; res autem, quæ ab illis inveſtigantur, ob certitudinem ſuam diviniores quasq; animas, & quas ex meliore luto finxit Titan, in ſui admirationem, etiam invitas ferme, abripere; inde fit, ut mortales,

omnium noſtrûm nimis fervido zelo æmuli, immortalitatem ex novis ſuis in hoc pulvere inventis conſequi anhelent. Et vero, quis unquam conatum honeſtæ rei conſequendæ, & qua non minus omnem ſibi poſteritatem demereri mortales poſsint, quam ſummum illud numen venerari, vituperandum ſtatuit? Ut vires egregii incepti perficiendi defuerint, voluntas tamen ſemper laudem apud æquos cenſores meruit. Atque hoc quidem magis audiendum cenſeo hunc Hermotimum, quo ab omni convitio ipſius inſtitutum alienius eſſe videtur. Si nova quædam ex Euthymio ſuo de proportionum doctrina, quam totius Geometriæ, imo rerum naturæ, nobiliſsimam nos cum omni antiquitate ſtatuimus, audiſſe dicit, & quæ præcipua quædam Geometriæ elementa, adeoque noſtra inventa, quæ illis ſuperſtructa ſunt, convellere poſsint; non ignoras, omnium noſtrûm famam, & doctrinæ ſoliditatem, cum tua vel ſtaturam; quemadmodum quidem nos opinamur, in omne ævum, & quamdiu hiſce legibus ſummus rerum opifex machinas illas circumvolvi voluerit; vel ineluctabili quodam fato hoc tempore ruituram. Tantum vero abeſt, ut huic homini ſuccenſendum putem, qui priſca exempla, ſed diverſo conſilio, ſecutus, ad nos deſcendit, ad dogmatis veritatem à nobis primis hauriendam, ut contra magna ipſum laude, & meliore laboris præmio, quàm ullus alius retulit, dignum cenſeam. Primi nunc in cauſa noſtra erimus judices, & oracula vel dabimus, vel accipiemus. Tu modo æquo animo adeſſe velis, & tuam non minus, quam Eudoxi, qui illa de proportionibus elementa

in primis concinnavit, doctrinam defendere. Me vides ad hoc promtiſsimum. & vobis quoque, præſtantiſsimæ animæ, & non minus inter mortales, quàm hîc inter beatas animas æternum triumfaturæ, non fore ingratum illud ſpero. Apollo. Mihi vero erit gratiſsimum, ô divine Archimedes, quidquid tibi & Euclidi hac in re faciendum videbitur. &, ut videtis, impatientia quadam feruntur cognoſcendæ hujus novæ doctrinæ & Pappus, & Eutocius ac Theo, dum ſe illi mortali Hermotimo, quamvis triſtiores primum, & conſortium illud abhorrentes, adplicare ſtuduerunt. Eucl. Cum vobis omnibus idem placere videam, agite admittamus novum illum hoſpitem, & nova dogmata ferentem, ut illius Euthymii ineptias ex uno omnes diſcamus. Vos verò, cum communis cauſa agatur, ad ſingula quæ expoſiturus eſt, diligenter attenturos, nullus dubitare poſſum.

Hermot. Quamquam quod vos, beatiſsimæ animæ, atque omnis certæ eruditionis lumina, amœniſsimo hoc loco compellare poſsim, in ſumma felicitatis meæ parte pono; nullam tamen majorem erga me benevolentiam à vobis proficiſci poſſe credite, quam ſi de iis, quæ ſine ullo obtrectandi animo, ac divina ſcripta veſtra lacerandi, propoſiturus venio, me benigne audiatis. Veritatis ſtudium, quo quidem nihil ſummo numini gratius, nihil humano ingenio dignius, inveniri exiſtimo, in me ſummum deprehendetis. Et vos quidem, quos hujus doctrinæ veritas aut falſitudo maxime tangit, in primis conſulendos ſtatui, quod & acerrime in illam inquiſituri ſitis, & æquiſsime de illa judicaturi.

adeoque ſi vera hæc doctrina invenietur, veſtro calculo adprobata, mortalium uſibus inſerviet; ſin falſa, veſtram ſolorum reprehenſionem incurret. Omnia autem, quæ de hac doctrina edoctus ſum à meo Euthymio, continua narrationis ſerie, quam pro libitu ingenioſis veſtris objectionibus interrumpere poteſtis, vobis ſum expoſiturus. Cum itaque his hiemalibus diebus poſt meridiem ad ipſum inviſiſſem, nunc, inquiebam, hora tertia eſt, & tenebræ ingruunt. quid ſi toties à te promiſſam doctrinam de proportionibus jam ex te audire poſsim ? Nihil gratius unquam feceris ; & acerrimum hocce frigus ad luculentum focum nos invitat, cui adſidentes ſeriis ſermonibus hanc veſperam extrahemus. Ad quæ cum pauca pro more reſpondiſſet Euthymius, petitioni meæ ſatisfacturus, ita diſſerere incepit.

Divina res eſt proportio, quam in univerſa natura colliganda, ac apte componenda Deum inſpexiſſe ſapientes tradiderunt. Cujus immenſam varietatem ex naturæ univerſitate metiri debemus. Nam & ad cœleſtia, quæ pulcherrimis rationibus compaginata ſunt, ſe extendit; & terreſtrium varietatem, certis legibus vinctam, comprehenſioni noſtræ ſubjicit. Quarum rerum conſideratione nec ſublimius quid ab humana mente ſuſcipitur ; nec utilius, ad omnia vitæ munia recte obeunda. Quod nec Deo, qui in univerſa natura ſe expreſsit, quidquam poſsit eſſe gratius, quam ſi in ipſa conſideretur ; nec mortalibus quidquam majorem felicitatem conferre poſsit, quam ſi ſe ipſos, id eſt, tam animi quam corporis vires menſurent, & relationem ſui cum ad cœleſtia, tum

ad terrena ſcrutentur. Cujus rei contemplatio hominem ſapientem reddit; & plena cognitio, Deo immortali ſimilem. Sapientis itaq; eſt, naturæ veſtigiis inſiſtere, acrerum omnium ratione, ac compaginationem, recta mentis acie intueri. Neq; enim Mathematicis ſolis relicta eſt proportionum conſideratio; quamvis primi naturam illarū in numeris & lineis, ſimpliciſsimo modo, inveſtigarint. In quo & Pythagoræ divinum ingenium emicuit; & Eudoxi ſolertia, qui quintum Elementorum Geometriæ librum in primis concinnavit, ab antiquitate eſt laudata. Sed, ſi dicere auſim, ad rei veritatem, quod naturæ veſtigiis non inſiſterent, in hac contemplatione non omnino penetrarunt. Quædam autem, quæ veteres recte docuerant, ſiniſtra recentiorum interpretatione ſunt depravata. Itaque & recentiores omnes reprehendam, qui antiquos non intellexerunt; & antiquos corrigam, qui male quædam prodiderunt; utroſque inſuper nova docturus. Atq; his cognoſcendis cum te intentum, inquit, ô Hermotime videā, ordine omnia tibi recenſere conabor.

Ratio, quæ Græcis λόγος dicitur, ſecundum quam hoc ad illud rationem habere adfirmamus, duorum ejusdem generis terminorum inter ſe certa relatio definitur. Euclidi: duarum magnitudinum ejusdem generis, ſecundum quantitatem, mutua quædam relatio. Ejuſdem generis additur, quod longitudines cum longitudinibus tantùm comparationem ſuſtineant, ſuperficies cum ſuperficiebus, ſolida cum ſolidis, liquida cum liquidis, vox cum voce, tempus cum tempore. At quæ diverſi generis ſunt, quomodo inter ſe ſint comparata, ſcire

non datur: ut puta, cubitus ad aureum, album ad dulce. Illa autem duorum terminorum, ſeu duarum magnitudinum mutua relatio, & comparatio, tantum fit ſecundum magnitudinem, ſeu quantitatem. quod bene in ſua definitione expreſsit Euclides. Alias & pater ad filium relationem habet, & amicus ad amicum, & dextrum ad ſiniſtrum; ſed non ſecundum magnitudinem. Breviter & nervoſe Euclidis definitionem, & ſequentium aliquas, Scholiaſtes Græcus explicavit, cujus pleraque Commandinus, in Latinum ſermonem à ſe verſa; ſed minus rectè, ſæpe & mutile; ſuæ editioni adjunxit. Græca verba, ut à Daſypodio edita ſunt, quod in ſequentibus nobis uſui eſſe poſsint, tibi proferam.

Λόγος] Τὸ μὲν λόγος προσέθηκεν, ἵνα σημαίνῃ τὴν σχέσιν. τὸ δὲ δύο μεγεθῶν, ἵνα χωρήσῃ τῶν ἄλλων εἰδῶν τοῦ ποσοῦ. τὸ δὲ ὁμογενῶν, ἵνα μὴ γραμμὴν πρὸς ἐπιφάνειαν συγκρίνῃ τίς. ταῦτα γὰρ ἄλογα πρὸς ἄλληλα. τὸ δὲ κατὰ πηλικότηλα, ἵνα χωρήσῃ τῶν ἀπείρων μεγεθῶν. πηλικότης γὰρ τὸ πέρας ἐςὶ τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ· καὶ ποσότης, τοῦ διωρισμένου. τὸ γὰρ διωρισμένον ποσὸν, οὐ μέγεθος. πλῆθος γάρ. τὸ δὲ ποιὰ σχέσις, ὅτι πέντε εἰσὶ τὰ εἴδη τῶν σχέσεων.

Ratio] *Duo* addidit, ut ſignificaret relationem. *magnitudinum*, ut ab aliis quoti ſpeciebus ſepararet. *ejuſdem generis*, ne quis lineam cum ſuperficie compararet: hæc enim nullam inter ſe rationem habent. *ſecundum quantitatem*, ut ſepararet ab infinitis magnitudinibus. Quantitas enim terminus eſt continui quoti; & quotitas, diſcreti. quippe diſcretum quotum non eſt magnitudo, ſed multitudo. *certa quædam relatio*, quoniam quinque ſunt relationum ſpecies.

Inepta hæc ſunt initio, adeoque corrupta. Pro, *τὸ μὲν λόγος*, vertendo legi, *τὸ μὲν δύο*. Deinde ejectâ

voce δύο, ſcribo, τὸ δὲ μεγεθῶν. Porro ποσὸν verti *quotum* potius quam *quantum.* ne cum πηλίκον id confunderem. Differunt enim Mathematicis τὸ πηλίκον, & τὸ ποσόν. quod τὸ πηλίκον ad quantitatem, ſeu potius, quotitatem continuam referatur; τὸ ποσὸν, ad diſcretam. quomodo & in hoc ſcholio accipiuntur πηλικότης & ποσότης. ideoque hoc ultimum novo vocabulo, neceſsitate adductus, verti *quotitas.* Sequitur aliud ſcholium, quo vocabulum ὁμογενῶν explicatur.

Ejusdem generis] *Ejusdem generis* dixit, quod, quæ diverſi generis ſunt, non poſſint inter ſe habere rationem. neque enim linea ad ſuperficiem, neque ſuperficies ad ſolidum, rationem habere poteſt; ſed linea ad lineam, & ſuperficies ad ſuperficiem, & ſolidum ad ſolidum. *Magnitudinum* additum eſt, ut ab iis diſtingueretur, quæ relationem inter ſe non habent; certe non eam, quæ eſt ſecundum magnitudinem: cujusmodi relatio eſt patris ad filium; amici ad amicum; dextri ad ſiniſtrum. Dicitur & alias, relatio ſecundum exceſſum & defectum.

Ὁμογενῶν] Ὁμογενῶν εἶπεν, ὅτι τὰ μὴ ὁμογενῆ οὐ δύναται ἔχειν λόγον πρὸς ἄλληλα. οὔτε γὰρ γραμμὴ πρὸς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, οὔτε ἐπίπεδον πρὸς στερεὸν δύναται λόγον ἔχειν· ἀλλὰ γραμμὴ πρὸς γραμμὴν, καὶ ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν, καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον. τὸ δὲ μεγεθῶν πρόσκειται, ἐκ διορισμοῦ τῶν σχέσιν μὴ ἐχόντων πρὸς ἄλληλα. οὐ μέντοι τὴν κατὰ μέγεθος· οἷον, πατρὸς πρὸς υἱόν. καὶ φίλου πρὸς φίλον. καὶ δεξιοῦ πρὸς ἀριστερόν. λέγεται δὲ καὶ ἄλλη σχέσις κατὰ τὸ ἔχειν καὶ ἐλλείπειν.

Et hic quædam ſunt corrupta. Lego ſimpliciter, οὔτε γὰρ γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν, οὔτε ἐπιφάνεια πρὸς στερεόν. neque enim quidquam attinet, num plana ſit ſuperficies, an rotunda. Deinde lego, καὶ στερεὸν πρὸς στερεὸν, pro καὶ

ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον. Cujus emendationis ratio eſt manifeſta. In fine pro ἄλλη lego ἄλλως, & ὑπερέχειν pro ἔχειν.

Rationem autem generaliter omnes magnitudines inter ſe habere Euclides dicit, quæ ſi multiplicentur, ſe invicem ſuperare poſſunt. Ideoque & earum magnitudinum inter ſe ratio eſt, quæ numeris exprimi non poſſunt. Egregium eſt in hanc definitionem ſcholium.

Λόγον ἔχειν] Ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν ἐστί τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ. ἔστι γάρ τινα, ὧν μόνη μὲν γινώσκεται ἡ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχὴ, ἡ δὲ ποσότης ἐστὶν ἄγνωστος. ταῦτα τοίνυν λόγον λέγεται ἔχειν τῆς ὑπεροχῆς, οὐκέτι δὲ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τουτέστι, ῥητόν. καὶ διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν, τὸ κατὰ πηλικότητα. ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς, καὶ κατὰ πηλικότητα, καὶ κατὰ ποσότητα ἐστίν· οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα, καὶ ῥητός. καθολικώτερον οὖν ὁριζόμενος τὰ τῶν λόγων τίνα ἐστὶν, ἐπήγαγεν, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. ἐφαρμόζει γὰρ καὶ τῷ ῥητῷ, καὶ τῷ μὴ ῥητῷ. οἷον,

Rationem habere] In numeris omnis ratio effabilem habet quotitatem: at in magnitudinibus ratio quædam eſt, quam numero effari nequeamus. Sunt enim quædam, quarum ſolus ſcitur exceſſus, ſi ad aliam referantur; at quotitas ejus eſt ignota. Hæ igitur rationem exceſſus habere dicuntur; non autem quam numerus ad numerum habet, hoc eſt, effabilem. Idcirco in definitione rationis magnitudinum addidit, *ſecundum quantitatem*. Omnis quippe ratio effabilis & in quantitate eſt, & in quotitate; at non item omnis ratio, quæ in quantitate, etiam eſt effabilis. Univerſalius igitur definiens, quæ ſint rationum magnitudines, ſubjunxit, quæ, ſi multiplicentur, ſe invicem ſuperare poſſunt. Hoc enim congruit & effabili rationi, & ineffabili. ut puta,

quadrati diametrus, ut in effabilibus numeris conſiderata, ad latus eſt irrationalis; ſed, ut in exceſſu, rationem habet, quam major quantitas ad minorem. Et quandoque latus, ſi multiplicetur, diametrum ſuperare poteſt.

ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος, ὡς μὲν ἐν ῥητοῖς λόγοις, πρὸς τὴν πλευρὰν ἄλογος· ὡς δὲ ἐν ὑπεροχῇ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ δύναται ἡ πλευρὰ πολλαπλασιαζομένη ποτὲ τῆς διαμέτρου ὑπερέχειν.

Hæc clara ſunt, niſi qvod v. 2. pro λόγοις ſcribendum putem, ἀριθμοῖς.

Rationem porro ſummâ & generali diviſione in æqualem & inæqualem Veteres diſtribuére. Quidquid enim in comparatione ad aliud conſideramus, aut æquale illi eſt aut inæquale. Præter hæc nullum tertium genus datur. Æqualis itaque ratio ſpectatur, cum eorum, quæ inter ſe comparantur, alterum, nec ſuperat id ad quod comparatur, nec ab eo deficit: ut 1 ad 1. 2 ad 2. 10 ad 10. cubitus ad cubitum. aureus ad aureum. ſonus meſe ad ſonum meſen. quatuor vini menſuræ ad quatuor menſuras aquæ. Atque hæc æqualis ratio una eademque eſt, & cæteras omnes antecedit, elementi naturam habens. At inæqualis ratio per ſubdiviſionem ſecatur in majorem & minorem. Major ratio ſecundâ ſubdiviſione in quinque ſpecies dividitur. Alia enim multiplex eſt, alia ſuperparticularis, alia ſuperpers; & ex his compoſitæ duæ, multiplexſuperparticularis, multiplexſuperpers. Minor ratio totidem ſpeciebus ex adverſo majori rationi reſpondet, quas, additâ illis vocabulis præpoſitione ſub, ita enunciamus: ſubmultiplex, ſubſuperparticularis, ſubſuperpers, ſubmultiplexſuperpar-

ticularis, ſubmultiplexſuperpers. Harum definitiones & exempla ſubjungam. Ratio multiplex eſt, cum major terminus ſæpius quam ſemel minorem continet, hoc eſt, cum major terminus à minore perfecte menſuratur, ut nihil ſuperſit: quam rationem ad unitatem obtinent numeri à binario, naturali ordine progredientes. Primus enim binarius, unitatis duplus eſt & dicitur, $\frac{2}{1}$. ternarius, triplus, $\frac{3}{1}$. quaternarius, quadruplus, $\frac{4}{1}$. & ſic in infinitum. Rurſus ſubmultiplex eſt, cum minor eorundum numerorũ refertur ad majorem; quomodo ſubdupla ratio eſt $\frac{1}{2}$. ſubtripla, $\frac{1}{3}$. ſubdecupla, $\frac{1}{10}$. Ratio ſuperparticularis, majoris rationis naturâ & ordine ſecunda ſpecies, eſt, cum major terminus minorem habet, & ejus unam particulam; quæ ſi dimidia fuerit, ratio ſeſquialtera dicitur, $\frac{3}{2}$. ſi triens, ſupertertia, $\frac{4}{3}$. ſi quadrans, ſuperquarta, $\frac{5}{4}$. quinarius enim quaternarium habet, & quaternarii partem quartam, hoc eſt, unitatem. His ex altera parte reſpondent, ſubſeſquialtera, $\frac{2}{3}$. ſubſupertertia $\frac{3}{4}$. & ſic deinceps in infinitum. Superpers ratio eſt, cum major terminus minorem in ſe habet, & inſuper partes unâ plures. quarum rationum prima eſt, ſuperbitertia, $\frac{5}{3}$. Deinde, ſupertriquarta, $\frac{7}{4}$. ſuperquaterquinta, $\frac{9}{5}$. ſuperquinqueſexta, $\frac{11}{6}$. ſuperſexundecima, $\frac{17}{6}$. Quibus ex adverſo minores reſpondent, ſubſuperbitertia $\frac{3}{5}$. ſubſupertriquarta $\frac{4}{7}$. & deinceps reliquæ. Ex his ſimplicibus compoſitæ duæ rationum ſpecies facile intelliguntur, nempe multiplexſuperparticularis, uti eſt duplaſeſquialtera, $\frac{5}{2}$. duplaſupertertia, $\frac{7}{3}$. duplaſuperquarta, $\frac{9}{4}$. triplaſuperſexta, $\frac{19}{6}$. & his ex adverſo reſpondentes minores, ſubdupla-

ſeſquialtera $\frac{2}{3}$. ſubduplaſupertertia $\frac{3}{7}$. Deinde multiplex-ſuperpers, cujus prima exempla ſunt, duplaſuperbitertia, $\frac{8}{3}$. duplaſupertriquarta, $\frac{11}{4}$. duplaſuperquaterquinta, $\frac{14}{5}$. alia, triplaſuperbiquinta, $\frac{17}{5}$. quadruplaſuperquaterſeptima, $\frac{32}{7}$. quibus minores reſpondent, minore termino ad majorem relato : ſubduplaſuperbitertia, $\frac{3}{8}$. ſubtriplaſuperbiquinta, $\frac{5}{17}$. Harum rationum, quæ minimis & inter ſe primis numeris exprimuntur, primæ in ſingulis ſpeciebus dicuntur, & fundi rationum ejusdem ſpeciei. Cum enim dupla ratio, & primis inter ſe numeris, $\frac{2}{1}$; & compoſitis, $\frac{4}{2}$. $\frac{6}{3}$. $\frac{8}{4}$. contineatur; fundus duplæ rationis dicitur, $\frac{2}{1}$. Sic ex $\frac{3}{2}$. $\frac{6}{4}$. $\frac{9}{6}$. $\frac{12}{8}$; quæ omnes ſunt in ratione ſeſquialtera; fundus eſt, πυθμὴν, ſeu πυθμενικὸς λόγος, fundata ratio, $\frac{3}{2}$. quæ primis inter ſe numeris comprehenditur. & ſic de cæteris. Porro & hoc monendum, numeri ad numerum rationem dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum : cujus rationis eſt limma in Harmonicis, contentum his minimis numeris, 256 ad 243. Eucl. Hæc omnia certa ſunt nec doctrinam noſtram convellunt. Hermot. Certiora tradi poſſunt : ſed hoc poſtea commodiore loco ſum moniturus. Hic enim, quæ ad ſequentia rectius intelligenda facere dicebat Euthymius, eo qvo ille mihi ordine diſſeruit, vobis recenſeo. Facilius, inquiebat, de novis hiſce dogmatis judicaveris, ſi veterum tibi placita non ignota fuerint. Jam tranſeo ad rationum compoſitionem, ſeu, ut vulgari vocabulo adpellamus, additionem. Sed prius, quæ mihi tradidit, Eutocii & Theonis commentaria, vobis legenda exhibeo.

ΕΥΤΟΚΙΟΣ ΕΙΣ ΤΟ Δ τοῦ β περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΓ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ἡ ΛΔ πρὸς ΛΓ· ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς ΛΔ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἀν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο, φανερόν. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥς τε τὴν ἔννοιαν ἀναποπληρῶσαι λέλεκται, ὡς ἐστὶν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι, καὶ Ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν, οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδὲν ἄτοπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. Φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, μέσος τὶς ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον. ὑπομνηστέον δὴ πρότερον, πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσιν τινὰ· πηλικότητος δηλονότι λεγο-

EUTOCIUS COMMENTARIO in IV. propoſ. II. Archimedis de Sphæra & Cylindro.

Quoniam igitur ratio RL ad LC conjuncta eſt ex ratione quam habet RL ad LD, & LD ad LC; inde quidem, rationum compoſitionem hîc accipi, ſumptâ media LD, quomodo & in Elementis accipiebatur, eſt manifeſtum. Hoc ipſum autem, quoniam inarticulate dictum eſt, nec ita, ut ſenſum expleat; uti deprehendere poſſunt qui Pappum legunt, & Theonem, & Arcadium, qui in multis libris non demonſtrative, ſed inductione hoc ipſum probant; non inconveniens fuerit pauliſper huic ſermoni immorari, ut hoc ipſum manifeſtius reddamus. Dico igitur, ſi inter duos numeros, duaſve magnitudines, medius aliquis terminus ſumatur, ab initio ſumtorum numerorum rationem componi ex ratione, quam habet primus ad medium, & eâ, quam habet medius ad tertium. Hoc autem prius in mentem revocandum, quomodo dicta ſit ratio ex rationibus componi. nempe ut in Elementis; Quando rationum quantitates in ſeipſas multiplicatæ aliquam rationem faciunt. cum ſcilicet quan-

titas dicitur numerus, à quo data ratio denominatur: uti dicunt, cum alii, tum Nicomachus libro primo de Muſica; & Herona, commentario in Arithmeticam Introductionem. Quod idem eſt ac ſi quantitas illa dicatur eſſe numerus, qui, ſi in ſequentem rationis terminum multiplicetur, efficiat antecedentem. Cæterum magis proprie in multiplicibus rationibus quantitas illa ſumetur; cum in ſuperparticularibus, aut ſuperpertibus quantitas ſumi nequeat, ita ut indiviſa maneat unitas. quare in iis unitas eſt dividenda: quamvis id non Arithmeticæ, ſed Logiſticæ conveniat. Dividitur autem unitas ſecundum partem, aut partes, à quibus ratio eſt denominata: ut ſit, accuratius loquendo, ſeſquialteræ rationis quantitas, præter unitatem inſuper unitatis dimidium; ſupertertiæ autem, præter unitatem adhuc tertium. Adeo ut, quemadmodum & ſuperiùs dictum eſt, rationis quantitas, cum in conſequentem terminum multiplicatur, faciat antecedentem. Novenarii enim ad ſenarium, ſeſquialteræ rationis, quantitas, quæ eſt unitas & dimidium, multiplicata in vi, facit ix.

μένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὥς φασιν ἄλλοι τὲ καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς. καὶ Ἡρώνα ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. ταυτὸν δὲ εἰπεῖν, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο. ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος. ὥστ᾽ ἐπ᾽ ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα, εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς κατὰ τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη, ἀφ᾽ ὧν ὀνόμασται ὁ λόγος· ὥστε εἶναι, ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος· τοῦ δὲ ἐπιτρίτου, πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον. ὥστε, καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου, ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον πολλαπλασιαζομένην, ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ, ἡμιολίου πηλικότης, οὗ ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ϛʹ, ποιεῖ τὸν θʹ. καὶ ἐπὶ τῶν

ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τὶς ὁ Γ. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν Α Γ λόγου πηλικότης ὁ Δ· τοῦ δὲ Γ Β ὁ Ε. ὁ ἄρα Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ Ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγου, τουτέστιν, ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ γὰρ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Β τὸν μὲν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, ὁ Η πρὸς τὸν Γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α. ἐναλλάξ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Γ πρὸς τὸν Α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς



& in aliis quoque idem perſpicere licet. His ita prius explicatis, ad id quod propoſitum fuit, redeundum. Sint dati duo numeri, A,B. quorum medius ſumtus ſit aliquis C. Monſtrandum eſt, rationem ipſius A ad B, conjunctam eſſe ex ea quam habet A ad C, & C ad B. Sumatur enim rationis A C quantitas, D; & rationis CB quantitas, E. Itaque E ipſum D multiplicans, faciat F. Dico ipſum F quantitatem eſſe rationis A ad B; hoc eſt, ipſum F, ſi B multiplicet, facere A. Nam B ipſum F multiplicans, faciat G. Quoniam itaque B ipſum F multiplicans fecit G; at ipſum E multiplicans, fecit C: eſt igitur, ut F ad E, ſic G ad C. Rurſus, quia D ipſum E multiplicans fecit F; at ipſum C multiplicans fecit A; eſt igitur, ut E ad C, ſic F ad A. Permutando, ut E ad F, ſic C ad A. & revertendo, ut F ad E, ſic A

ad C. Sed ut F ad E, ſic oſtenſus eſt G ad C: ergo &, ut G ad C, ſic A ad C. quare A ipſi G æqualis eſt. At B ipſum F multiplicans fecit G. igitur & B ipſum F multiplicans facit A. quare F quantitas eſt rationis A ad B. Factus autem eſt F, ipſo D in E multiplicato, hoc eſt, quantitate rationis A C, in quantitatem rationis C B. Itaque ratio ipſius A ad B compoſita eſt, & ex ea quam habet A ad C, & C ad B. quod monſtrare oportebat.

Sed ut in exemplo quoque quod diximus clarum fiat, incidat inter XII & II medius aliquis numerus IV. Dico ipſius XII ad II rationem, nempe ſextuplam, componi tum ex tripla, ipſius XII ad IV; tum ex dupla, ipſius IV ad II. Si enim quantitates harum rationum in ſe invicem multiplicemus, id eſt, III in II, fit VI, qui eſt quantitas rationis XII ad II. eſtque ſextupla; quam & demonſtrare erat propoſitum. Quod ſi vero medius incidens non ſit majore minor, & minore major, ſed viciſſim, aut utriſque major, aut utriſque minor; etiam ſic prædicta compoſitio ſequetur. Inter IX & VI medius aliquis incidat utroque

τὸν Γ. ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, ἐδείχθη ὁ Η πρὸς τὸν Γ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Γ. ἴσος ἄρα ὁ Α τῷ Η. ἀλλ' ὁ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν. καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ Ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγου. καὶ ἔστιν ὁ Ζ, τοῦ Δ ἐπὶ τὸν Ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι, τῆς πηλικότητος τοῦ Α Γ λόγου, ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ Γ Β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ' καὶ τοῦ β' μέσος τὶς ἀριθμὸς ὁ δ'. λέγω ὅτι ὁ τοῦ ιβ' πρὸς τὸν β' λόγος, τουτέστιν, ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου, τοῦ ιβ' πρὸς τὸν δ', καὶ τοῦ διπλασίου, τοῦ δ' πρὸς τὸν β'. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι, τὸν γ' ἐπὶ τὸν β', γίνεται ὁ ς', πηλικότης ὢν τοῦ τοῦ ιβ' πρὸς τὸν β' λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων· καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις ἡ

προειρημένῃ ἀκολουθήσει. Τοῦ θ′ καὶ τοῦ ϛ′ μέσος τὶς παρεμπιπτέτω, ἀμφοτέρων μείζων, ὁ ιβ′. λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου, τοῦ θ′ πρὸς τὸν ιβ′, λόγου, καὶ τοῦ διπλασίου, τοῦ ιβ′ πρὸς τὸν ϛ′, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος, τοῦ θ′ πρὸς τὸν ϛ′. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ′ πρὸς τὸν ιβ′ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν, ἥμισυ καὶ τέταρτον· ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ′ πρὸς τὸν ϛ′, ἐστὶν ὁ β′. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β′ ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς μία καὶ ἥμισυ, ἥτις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ′ πρὸς τὸν ϛ′. Ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ′ καὶ τοῦ ϛ′ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ′· ἐκ τοῦ θ′ πρὸς δ′, διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ′ πρὸς ϛ′, ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ δύο τέταρτα, ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι, τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες, ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου, ὡς εἴρηται, λόγου. καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος.

major, nempe XII. Dico, tum ex ſubſupertertia ratione ipſius IX ad XII; tum ex dupla, ipſius XII ad VI, compoſitam eſſe ſeſquialteram, ipſius IX ad VI. quippe rationis, ipſius IX ad XII, quantitas ſunt tres partes quartæ, hoc eſt, ſemis & quartum: at quantitas ipſius XII ad VI eſt II. Si igitur ipſum II multiplicemus per dimidium & quartum, fit unitas una & dimidium, quæ quantitas eſt ſeſquialteræ rationis, quam & IX habet ad VI. Similiter etiam ſi inter IX & VI medius incidat IV; ex ipſius IX ad IV ratione duplaſuperquarta, & IV ad VI ſubſeſquialtera, compoſita eſt ratio ſeſquialtera. Rurſus enim, ſi quantitatem duplaſuperquartæ, nempe duo & quartum, per quantitatem ſubſeſquialteræ, hoc eſt, duas tertias, multiplicaverimus, habebimus unum ſemis, ſeſquialteræ rationis, ut dictum eſt, quantitatem. Atque omnibus caſibus ſimili modo eadem demonſtratio congruet.

Συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς, ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὴ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων,

Ex dictis autem perſpicuum eſt, ſi inter datos duos numeros, aut magnitudines, non unus medius, ſed plures termini incidant, extremorum rationem componi ex omnibus ra-

tionibus, quas deinceps poſiti termini habent; incipientes à primo, & in ultimum deſinentes, ſe proxime conſequentium ordine. Inter duos enim terminos A, B incidant plures uno, C, D. Dico ipſius A ad B rationem compoſitam eſſe, & ex ea quam habet A ad C, & C ad D, & D ad B. Quoniam enim ipſius A ad B ratio compoſita eſt, tum ex ea quam habet A ad D, tum D ad B, ut ſuperius eſt dictum; at ipſius A ad D ratio compoſita eſt & ex ea quam habet A ad C, & C ad D: Igitur ipſius A ad B ratio conjuncta eſt & ex ea quam habet A ad C, & C ad D, & D ad B. Similiter & reliquis caſibus demonſtrationem adcommodabimus.



ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι ὅροι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον, τῇ κατὰ τοὺς ἐχομένους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν Α, Β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ Γ, Δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται· ὁ δὲ τοῦ Α πρὸς τὸν Δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

INCERTI AUCTORIS Scholium in V definitionem lib. VI Euclidis.

Ratio ex rationibus compoſita dicitur, cum quantitates aliquarum rationum multiplicatæ fecerint rationem.] Ratio ex iis rationibus compoſita dicitur, quarum quantita-

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ϛʹ ἄδηλον.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον.] Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται,

ὧν αἱ πηλικότητες ποιοῦσιν αὐτόν. πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ' ὧν ὀνομάζονται· ὡς ἀπὸ τοῦ δύο, ὁ διπλάσιος. ἔστω λόγος, τοῦ ὀκτὼ πρὸς τὸν δ', διπλασίων· καὶ αὖ τοῦ δ' πρὸς τὸν β', διπλασίων καὶ αὐτός. ὁ τετραπλάσιος οὖν λόγος τοῦ η' πρὸς τὸν β', συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε η' πρὸς τὸν δ', καὶ τοῦ δ' πρὸς τὸν β', ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως. ἐπεὶ, ὡς εἴρηται, πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ' ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται· οἷον ἀπὸ τοῦ δύο, καὶ τρία, καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος λόγος· ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνός· ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς· λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ' ἧς ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς λέγεται, ὃν λεπτῶν πρώτων λ'. λαμβάνω καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ' ἧς πάλιν ὁ δ' ἥμισυς λέγεται τοῦ η', καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ' πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ' πρῶτα καὶ αὐτὰ λεπτὰ, καὶ γίνονται δεύτερα λεπτὰ, ἐννεακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω, ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτά. ἅτινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτὰ, τέταρτόν ἐστι μονάδος. τετράκις γὰρ ιε', ξ'. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τοῦ β' καὶ η',

tes ipſam faciunt. Quantitates autem dicit, à quibus rationes denominantur : ut à binario, dupla. Sit ratio dupla, octonarii ad IV; & rurſus IV ad II, & ipſa dupla. Itaque ratio quadrupla, VIII ad II, compoſita dicitur ex duabus illis rationibus, tum VIII ad IV, tum IV ad II, quoniam quantitates illarum eam faciunt hoc modo. Quandoquidem, ut dictum eſt, quantitates ii numeri dicuntur, à quibus relationes nominantur; ut à binario, & ternario, & quaternario, dupla ratio, & tripla, & quadrupla: præterea dimidium quoque ab unitate denominatur, & binarius quaternarii eſt dimidius: ideo dimidium ſumo unitatis, à qua binarius quaternarii dimidius dicitur, exiſtens primorum minutorum XXX. Deinde aliud ſumo unitatis dimidium, à qua rurſus quaternarius dicitur dimidius octonarii; & multiplico XXX prima minuta in XXX, & ipſa prima minuta; & fiunt nongenta, minuta ſecunda. Hæc reduco, ſeu divido, & fiunt quindecim prima minuta: quæ quindecim prima minuta ſunt quadrans unitatis. quippe quater quindena ſunt LX. Verum ſit medius inter II & VIII,

numerus XL. quoniam igitur binarius eſt quadragenarii pars vigeſima, ſumo vigeſimam partem unitatis, quæ eſt trium minutorum. Rurſus quia XL eſt quintupla ipſius VIII, pars quadragenarii dicitur octonarius. Multiplico ternarium, partem viceſimam ipſius LX, per V, à quo VIII dicitur pars quinta ipſius XL. & fiunt minuta XV: quæ ſunt unitatis quadrans. Et ſic rurſus binarius eſt pars quarta octonarii. Sit jam inter IV & XII poſitus numerus VIII. Quoniam igitur IV dimidius eſt VIII; at VIII ſubſeſquialter ipſius XII, ſumo minuta XXX, unitatis ſemiſſem; & rurſus minuta XL, numerum unitatis ſubſeſquialterum; & multiplico XXX per XL, fiuntque milleducenta, ſecunda minuta. Hæc reduco, & fiunt minuta prima XX. quæ ſunt triens unitatis. ut & IV eſt triens ipſius XII. Sit inter II & XII poſitus IV. Et quia binarius quaternarii eſt dimidius, at IV ſubtriplus ipſius XII; ſumo XXX minuta, unitatis dimidium; & XX, illiustrientem: quippe à ternario tripla ratio eſt denominata: & multiplico XXX per XX, fiunt ſexcenta, ſecunda minuta. quæ reducta fiunt

ὁ μʹ. καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μʹ εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος, ὃν λεπτῶν τριῶν. ἐπεὶ πάλιν ὁ μʹ πενταπλάσιός ἐστι τοῦ ηʹ, μέρος τοῦ μʹ ὁ ηʹ λέγεται. πολλαπλασιάζω τὸν τρία, τὸ εἰκοστὸν τοῦ ξʹ, παρὰ τὸν εʹ, ἀφ᾽ οὗ πέμπτον μέρος ὁ ηʹ τοῦ μʹ λέγεται, καὶ γίνονται ιεʹ λεπτὰ, ἅπερ ἐστι τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ βʹ τοῦ ηʹ τέταρτόν ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δʹ καὶ ιβʹ ὁ ηʹ· ἐπεὶ ὁ δʹ ἥμισύς ἐστι τοῦ ηʹ, ὁ δὲ ηʹ ὑφημιόλιος τοῦ ιβʹ, λαμβάνω τὰ λεπτὰ λʹ, τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ πάλιν τὰ μʹ λεπτὰ, τὸν ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λʹ παρὰ τὰ μʹ, καὶ γίνονται χίλια διακόσια, δεύτερα λεπτά. ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κʹ. τὰ κʹ τρίτον ἐστὶ μονάδος. καὶ ὁ δʹ οὖν τρίτον ἐστὶ τοῦ ιβʹ. Ἔστω μεταξὺ τοῦ βʹ καὶ τοῦ ιβʹ ὁ δʹ. καὶ ἐπειὸ δύο τοῦ δʹ ἥμισύς ἐστιν, ὁ δὲ δʹ τοῦ ιβʹ ὑποτριπλάσιος λαμβάνω τὰ λʹ λεπτὰ, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ· καὶ τὰ κʹ, τὸ τρίτον αὐτῆς. ἀπὸ γὰρ τοῦ τρία ὁ τριπλάσιος παρωνόμασται. καὶ ποιῶ τὰ λʹ ἐπὶ τὰ κʹ, γίνονται ἑξακόσια δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται

δέκα πρῶτα. τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος. καὶ ὁ β´ ἕκτον τοῦ ιβ´. Πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ δ´ καὶ ε´, ὁ κ´. καὶ ἐπεὶ ὁ δ´ ὑποπενταπλάσιός ἐστι τοῦ κ´, ὁ δὲ κ´ τετραπλάσιος τοῦ ε´. λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον, τὰ ιβ´. καὶ τὸν δ´, ἀφ᾽ οὗ ὁ ε´ τέταρτον λέγεται τοῦ κ´, καὶ ποιῶ τὰ τέσσαρα παρὰ τὰ δώδεκα, γίνονται μη´, ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. καὶ ὁ δ´ τοῦ ε´ ὑποεπιτέταρτός ἐστιν. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ β´ καὶ δ´, ὁ γ´. καὶ ἐπεὶ ὁ δ´ τοῦ γ´ ἐπίτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν, καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ὅ ἐστι μονάς· λαμβάνω τὴν μονάδα, ἥτις ἐστὶ λεπτὰ ξ´. ἀφ᾽ ἧς μονάδος τρίτον ὄντος τοῦ τρία, ὁ δ´ ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸν λ´, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸ τὸν τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῦ β´. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος. καὶ ποιῶ τὸν λ´ παρὰ τὴν μονάδα, ἤτοι ξ´ λεπτὰ, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια, δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνεται λ´ πρῶτα λεπτά. ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ β´ τοῦ δ´ ἥμισύς ἐστιν.

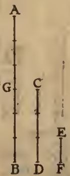
Λόγος ἐκ δύο λόγων, ἢ καὶ πλειόνων, συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες

decem prima. Hæc decem ſunt ſextans unitatis. ut & II eſt ſexta pars XII. Rurſus eſto inter IV & V poſitus numerus XX. Quoniam igitur IV eſt ſubquintuplus ipſius XX; at XX quadruplus ipſius V; ſumo unitatis partem quintam, XII; & IV, à quo quinarius quarta pars dicitur vicenarii; & multiplico IV per XII. fiunt IIL, qui numerus eſt ſubſuperquartus unitatis. quomodo & IV ſubſuperquartus eſt ipſius V. Sit iterum inter II & IV medius III. Et quoniam IV ipſius III ſupertertius eſt; quia eum continet, & ejus trientem, qui eſt unitas; ſumo unitatem, quæ eſt minutorum LX; cujus unitatis cum triens ſit ternarius, ipſe quaternarius ejus ſupertertius dicitur. Sumo quoque XXX, unitatis dimidium, quod III ſit ſeſquialter ipſius II. denominatur enim ſeſquialterum à ſemiſſe. Jam multiplico XXX per unitatem, ſeu LX minuta, & fiunt mille octingenta, minuta ſecunda. Hæc reduco, & fiunt XXX, minuta prima; quæ ſunt unitatis dimidium: quomodo & II ipſius IV eſt dimidius.

Ratio ex duabus rationibus, vel etiam pluribus, compoſita dicitur, cum rationum

quantitates multiplicatæ fecerint aliquam rationis quantitatem.

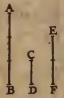
Habeat enim AB ad CD rationem datam; ut, duplam, aut triplam, aut aliam quandam; & CD quoque ad EF datam habeat rationem: Dico rationem ipſius AB ad EF compoſitam eſſe ex ratione AB ad CD, & ratione CD ad EF. ſeu, ſi rationis AB ad CD quantitas multiplicetur per rationis CD ad EF quantitatem, inde fieri quantitatem rationis AB ad EF. Sit enim primum AB major ipſa CD, & CD major ipſa EF; ſitque AB ipſius CD dupla; CD autem ipſius EF tripla. Quoniam igitur CD ipſius EF tripla eſt, at ipſius CD dupla AB; igitur AB ipſius EF eſt ſextupla. quoniam, ſi triplum alicujus duplicaverimus, fiet ipſius ſextuplum. Hoc enim proprie eſt compoſitio. Vel hoc modo: Quoniam AB ipſius CD eſt dupla, dividatur AB in partes ipſi CD æquales, quæ ſint AG, GB. & quoniam CD ipſius EF eſt tripla, at



πολυπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου.

Ἐχέτω γὰρ τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον· οἷον διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον. καὶ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ EZ, καὶ αὐτὸ δεδομένον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ AB πρὸς τὸ EZ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ EZ. ἤτοι ὅτι, ἐὰν ἡ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ EZ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ AB πρὸς EZ. Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν AB τοῦ ΓΔ μεῖζον, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ EZ. καὶ ἔστω τὸ μὲν AB τοῦ ΓΔ διπλάσιον· τὸ δὲ ΓΔ τοῦ EZ τριπλάσιον· ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΓΔ τοῦ EZ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΓΔ διπλάσιον τὸ AB· τὸ ἄρα AB τοῦ EZ ἐστὶ ἑξαπλάσιον· ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον· τοῦτο γάρ ἐστι κυρίως σύνθεσις· ἢ οὕτως ἐπεὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ AB εἰς τὰ τῷ ΓΔ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα, τὰ AH, HB. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔ τοῦ EZ ἐστὶ τριπλάσιον· ἴσον δὲ τὸ

ΑΗ τῷ ΓΔ. καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τοῦ ΕΖ ἐστὶ τριπλάσιον. ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ τοῦ ΕΖ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ λόγου· ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΓΔ ἑκατέρων τῶν ΑΒ, ΕΖ, τὸ αὐτὸ συναχθήσεται. Ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ τριπλάσιον· τὸ δὲ ΓΔ ἥμισυ τοῦ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΖ, τοῦ δὲ ΓΔ τριπλάσιον τὸ ΑΒ· τὸ ΑΒ ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ΕΖ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισύ τινος τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. ἢ καὶ οὕτως· ἐπεὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ ἐστὶ τριπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ ἐστὶ ἥμισυ, οἵων ἐστὶ τὸ ΑΒ ἴσων τῷ ΓΔ τριῶν, τοιούτων ἐστὶ τὸ ΕΖ δύο. ὥς τε ἡμιόλιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΕΖ. ὁ ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστω τὸ ΓΔ ἑκατέρου τῶν ΑΒ, ΕΖ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ ἥμισυ μέρος· τὸ δὲ ΓΔ



AG ipſi CD æqualis; erit igitur AG ipſius quoque EF tripla. ideoque tota AB ipſius EF eſt ſextupla. Quare ratio ipſius AB ad ipſam EF conjuncta eſt per medium terminum CD, compoſita ex ratione AB ad CD, & ratione CD ad EF. Similiter autem, ſi quoque CD utrâvis ipſarum AB, EF, minor ſit, idem conficietur. Sit enim rurſus AB ipſius CD tripla; at CD ipſius EF dimidia. Quoniam igitur CD dimidia eſt ipſius EF, at ipſius CD tripla AB; erit ergo AB ipſius EF ſeſquialtera. Si enim dimidium alicujus triplicaverimus, habebimus ipſum ſemel, & dimidium. Vel etiam hoc modo. Quoniam AB ipſius CD eſt tripla, at CD ipſius EF dimidia, qualium partium, ipſi CD æqualium, AB eſt trium, talium eſt EF duarum. ut AB ſeſquialtera ſit ipſius EF. Itaque ratio AB ad EF conjuncta eſt per CD medium terminum, compoſita tum ex ratione AB ad CD, tum ex ratione CD ad EF. Sed rurſus, ſit CD utrâvis ipſarum AB, EF, major: & ſit AB ipſius CD dimidia, at CD

ſupertertia ipſius EF. Quoniam igitur, qualium partium eſt AB duarum, talium CD eſt quatuor; qualium autem CD eſt quatuor, talium EF eſt trium: igitur etiam qualium AB eſt duarum, talium EF eſt trium. Itaque rurſus conjuncta eſt ratio ipſius AB ad EF per medium terminum CD; quæ ratio eſt binarii ad ternarium. Similiter & in reliquis caſibus, pluribus mediis terminis interpoſitis, demonſtratio adplicabitur. Sed & hoc liquet, ſi à compoſita ratione quævis componentium auferatur, una ex ſimplicibus evaneſcente, reliquas componentium relictum iri.



τοῦ ΕΖ ἐπίτριτον· ἐπεὶ οὖν οἵων ἐςὶ τὸ ΑΒ δύο, τοιούτων ἐςὶ τὸ ΓΔ τεσσάρων. οἵων δὲ τὸ ΓΔ τεσσάρων, τοιούτων τὸ ΕΖ τριῶν. καὶ οἵων ἄρα τὸ ΑΒ δύο, τοιούτων τὸ ΕΖ τριῶν. συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς ΕΖ λόγος διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου, ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁποιοσοῦν τῶν συντιθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τῶν ἁπλῶν ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντιθέντων καταλειφθήσονται.

Sequuntur quædam Euclidis definitiones cum ſcholiis; ut & alia, quæ ad ſequentium explicationem requiruntur.

In eadem ratione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplices, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, ſecundum quamcunque multiplicationem, utraque ab utrâque aut unà deficiunt; aut unà

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα

ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα καλάλληλα.

Ἐν τῷ αὐλῷ] Οὕτως ἄν τις διὰ ἀριθμῶντα τῶν λόγων, πῶς ἔχουσι, σαφηνείας χάριν ἐκθείη. Ἔστωσαν ἀριθμοὶ τέσσαρες ἐφεξῆς, καὶ δέον ἔστω γνῶναι, ἤπερ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ὁ πρῶτος πρὸς δεύτερον, καὶ ὁ τρίτος πρὸς τέταρτον· ἢ μείζονα λόγον ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς δεύτερον, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τέταρτον· ἢ ἐλάσσονα. πολλαπλασιασθήτωσαν ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἐπ᾽ ἀλλήλους, ἵνα οἱ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γένωνται ἴσοι. εἶτα πολλαπλασιασθήτωσαν ὁ μὲν πρῶτος ἐπὶ τὸν τέταρτον· ὁ δὲ δεύτερος ἐπὶ τὸν τρίτον. καὶ ἐὰν ὦσιν οἱ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἴσοι, φήσομεν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· εἰ δὲ μείζων ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου, τοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου, μείζονα λόγον ἔχειν τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον· εἰ δὲ ἐλάσσων ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου, τοῦ ἐκ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον.

æquales ſunt; aut unà ſuperant, ordine ſumtæ.

In eadem] Quomodo rationes inter ſe ſint comparatæ, numeris, majoris evidentiæ gratia, ita quis exponat. Sint numeri quatuor deinceps, & ſcire oporteat, num in eadem ratione ſint primus ad ſecundum, & tertius ad quartum: aut etiam majorem rationem habeat primus ad ſecundum quam tertius ad quartum: aut minorem. Multiplicentur inter ſe invicem tertius & quartus, ut ex multiplicatione prodeuntes fiant æquales. Deinde multiplicentur primus in quartum; & ſecundus in tertium. Jam ſi ex multiplicatione primi & ſecundi prodeuntes æquales fuerint, in eadem ratione eſſe dicemus primum ad ſecundum, in qua tertius ad quartum. Quod ſi major fuerit is, qui ex primi multiplicatione prodit, illo qui ex multiplicatione ſecundi; majorem rationem habere dicemus primum ad ſecundum quàm tertius habeat ad quartum. Sin minor fuerit is, qui ex primi multiplicatione prodit, illo qui ex multiplicatione ſecundi; minorem rationem habere primum ad ſecundum quàm tertius habeat ad quartum.

Exemplum, cum in eadem ratione ſunt, erunt hi numeri: XII. VI. VIII. IV. Multiplicentur inter ſe mutuo, VIII in IV, fiunt XXXII; IV in VIII, fiunt rurſus XXXII. Similiter multiplicentur, XII in IV, fiunt IIL; & VI in VIII, fiunt itidem XXXXVIII. Unde manifeſtum, in eadem ratione eſſe XII ad VI, & VIII ad IV. At cum majorem rationem habet primus ad ſecundum quàm tertius ad quartum, exemplo erunt hi numeri: X. IV. VI. III. Multiplicentur invicem, VI in III, fiunt XVIII; & III in VI, fiunt itidem XIIX. Deinde X in III, fiunt XXX; & IV in VI, fiunt XXIV. Hinc rurſus manifeſtum, majorem rationem habere X ad IV quàm VI habeat ad III. Porro, ſi minorem habeat rationem primus ad ſecundum quàm tertius ad quartum, exemplum habebimus in his numeris: XII. VII. XVIII. IX. Multiplicato XIIX in IX, fiunt CLXII; & IX in XIIX, rurſus CLXII. Deinde XII in IX, fiunt CIIX; & VII in XVIII, fiunt CXXVI. Et hinc perſpicuum, primum ad ſecundum minorem rationem habere quam tertius habeat ad quartum.

ὑποδείγματα τοῦ μὲν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται ἀριθμοὶ οὗτοι· ιϐ΄. ϛ΄. η΄. δ΄. πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ' ἀλλήλους, ὁ μὲν η΄ ἐπὶ τὸν δ΄, γίνονται λϐ΄· ὁ δὲ δ΄ ἐπὶ τὸν η΄, γίνονται πάλιν λϐ΄. ὁμοίως πολλαπλασιασθήσωσαν ὁ μὲν ιϐ΄ ἐπὶ τὸν δ΄, γίνονται μη΄· ὁ δὲ ϛ΄ ἐπὶ τὸν η΄, γίνονται μη΄. καὶ φανερὸν, ὅτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ὅ, τε ιϐ΄ πρὸς τὸν ϛ΄, καὶ ὁ η΄ πρὸς τὸν δ΄. τοῦ δὲ μείζονα λόγον ἔχειν τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον, ἀριθμοὶ οὗτοι· ι΄. δ΄. ϛ΄. γ΄. πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ' ἀλλήλους ὁ μὲν ϛ΄ ἐπὶ τὸν γ΄, γίνονται ιη΄· καὶ ὁ γ΄ ἐπὶ τὸν ϛ΄, γίνονται ὁμοίως ιη΄. εἶτα ὁ ι΄ ἐπὶ τὸν γ΄, γίνονται λ΄· ὁ δὲ δ΄ ἐπὶ τὸν ϛ΄, γίνονται κδ΄. καὶ πάλιν φανερὸν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει ὁ ι΄ πρὸς τὸν δ΄ ἤπερ ὁ ϛ΄ πρὸς τὸν γ΄. τοῦ δὲ ἐλάσσονα ἔχειν λόγον τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον, ἀριθμοὶ οὗτοι· ιϐ΄. ζ΄. ιη΄. θ΄. ὁ ιη΄ ἐπὶ τὸν θ΄, γίνονται ρξϐ΄· καὶ ὁ θ΄ ἐπὶ τὸν ιη΄, πάλιν ρξϐ΄. εἶτα ὁ ιϐ΄ ἐπὶ τὸν θ΄, γίνονται ρη΄· καὶ ὁ ζ΄ ἐπὶ τὸν ιη΄, γίνονται ρκϛ΄. καὶ φανερὸν ὅτι ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον.

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου· τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Cum magnitudinum æque multiplicium, multiplex primæ ſuperat multiplicem ſecundæ; at tertiæ multiplex non ſuperat multiplicem quartæ; tum prima ad ſecundam majorem rationem habere dicitur quàm tertia habet ad quartam.

Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

Analogia eſt rationum ſimilitudo. Analogia in tribus terminis minima eſt.

Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

Cum tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam dicitur habere rationem duplam ejus quam habet ad ſecundam. Cum quatuor magnitudines proportionales ſunt, prima ad quartam dicitur habere rationem triplam ejus quam habet ad ſecundam: & deinceps ſemper unam amplius rationem, quoaſque proportio fuerit.

Σχόλιον.

Scholium.

Ὅταν δὲ τρία μεγέθη] *Οὐ λέγει, ὅτι δύο λόγοι τοῦ ἑνὸς διπλάσιοι εἰσί· καὶ τοῦτο μὲν γάρ· ἀλλ' ὅτι ὁ λόγος, ὁ ἐκ τῶν δύο, διπλάσιος ἐστιν· ὡς*

Cum tres magnitudines] Non dicit, duas rationes unius eſſe duplas; quod etiam verum: ſed rationem, ex binis conſtantem, eſſe duplam; ut,

VIII. IV. II. aut, IX.III. I. Etenim in primis duæ ſunt duplæ rationes continuæ; ſeu, quam habet VIII ad IV, & IV ad II. Sed VIII ad II, ſeu, primus ad tertium, non habet rationem duplam ejus quam habet ad II, id eſt, ſecundum, ſed bis duplam; ſeu, quam habet primus ad ſecundum, & quam habet ſecundus ad tertium. Similiter & in triplis, IX. III. I. duæ ſunt triplæ rationes continuæ. Habet enim IX ad III, rationem triplam; & III ad unitatem itidem rationem triplam: Sed novenarius ad unitatem bis habere dicitur eam rationem, quam habet ad ternarium. quippe inter IX & I duæ ſunt rationes triplæ. Similiter in cæteris. Atque ita ſe res habet, ſi tres ſint magnitudines proportionales; at ſi quatuor, prima ad quartam habet rationem triplam ejus quam habet ad ſecundam. Inter quatuor enim numeros, in eadem ratione poſitos, tres ſunt eædem rationes. Ideoque primus ad quartum dicitur habere ter eam rationem quam habet ad ſecundum, id eſt, triplam.

η΄. δ΄. β΄. ἢ, θ΄. γ΄. α΄. καὶ γὰρ ἐν μὲν τοῖς πρώτοις, δύο μὲν διπλάσιοι λόγοι εἰσὶ συνεχεῖς ἤτοι, ὃν ἔχει ὁ η΄ πρὸς τὸν δ΄, καὶ ὁ δ΄ πρὸς τὸν β΄. ἀλλ' ὁ η΄ πρὸς τὸν β΄, ἤτοι, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τρίτον, οὐκ ἔχει λόγον διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει πρὸς τὸν β΄, τουτέστι, τὸν δεύτερον, ἀλλὰ δὶς τὸν διπλάσιον. ἤτοι, ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, καὶ ὃν ἔχει ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν τριπλασίων, τοῦ θ΄. γ΄. α΄. ἔχει μὲν γὰρ ὁ θ΄ πρὸς τὸν γ΄, λόγον τριπλασίονα· καὶ ὁ γ΄ πρὸς τὴν μονάδα, λόγον ὡσαύτως τριπλάσιον. ἀλλ' ὁ θ΄ πρὸς τὴν μονάδα δὶς λέγεται ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει πρὸς τὸν γ΄. μεταξὺ γὰρ τοῦ θ΄. α΄. δύο λόγοι εἰσὶ τριπλάσιοι. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως. καὶ οὕτω μὲν ἐὰν τρία ἐστὶ τὰ ἀνάλογον μεγέθη. ἐὰν δὲ τέσσαρα, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον. μεταξὺ γὰρ τεσσάρων ἀριθμῶν, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ κειμένων, τρεῖς οἱ αὐτοὶ λόγοι εἰσί. καὶ διὰ τοῦτο λέγεται ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον ἔχειν τρὶς τὸν λόγον ὃν ἔχει πρὸς τὸν δεύτερον, τουτέστι, τριπλάσιον.

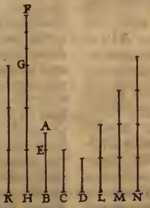
EUCLIDIS ELEMENTORUM LIB. V.

PROPOSITIO VIII.

ΤΩΝ ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον, πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ, πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Inæqualium magnitudinum major, ad eandem, majorem rationem habet quàm minor: & eadem, ad minorem, majorem rationem habet quàm ad majorem.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη, τὰ ΑΒ, Γ. καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ Γ. ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ. λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ. καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ. ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ. τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ. καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, ἕως οὗ τὸ γινόμενον μεῖζον γένηται τοῦ Δ. καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ, μεῖζον ὂν τοῦ Δ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ



Sint inæquales magnitudines, AB, C: & ſit AB major quàm C. alia autem quæcunque, D. Dico AB ad D majorem rationem habere quàm C ad D: & D ad C majorem rationem habere quàm ad AB. Quoniam enim major eſt AB quàm C, ponatur ipſi C æqualis BE. Jam verò ſi minor ipſarū AE, EB multiplicetur, illa major aliquando erit quàm D. Sit primùm AE minor quàm EB. & multiplicetur AE, donec quæ inde producitur magnitudo major ſit quàm D. ſitque ipſius multipla FG, major quàm D. Et quotupla eſt FG ipſius AE, totupla fiat & GH

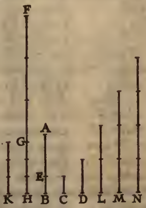
ipſius E B, & K ipſius C. ſumaturque ipſius D dupla, L; & tripla M; & deinceps unitate ſuperantes, donec quæ ſumitur, multipla quidem fiat ipſius D, primo autem major quàm K. Sumatur, & ſit N, quadrupla ipſius D, primo autem major quàm K. Quoniam igitur K primo minor eſt quàm N, idcirco K non eſt minor quàm M. Et quoniam æque multipla eſt FG ipſius AE, & G H ipſius E B, igitur æque multipla eſt FG ipſius AE, & FH ipſius AB. Æque autem multipla eſt FG ipſius AE, & K ipſius C. Quare æque multipla eſt F H ipſius AB, & K ipſius C. Ergo magnitudines FH, K, ipſarum AB, C æque ſunt multiplæ. Rurſus quoniam æque multipla eſt G H ipſius E B, & K ipſius C; æqualis autem EB ipſi C; igitur & GH æqualis eſt ipſi K. at K non eſt minor quàm M. neque ergo G H minor eſt quàm M. Porro F G major eſt quàm D. Tota igitur FH ambabus, D, M, major eſt. Sed ambæ, D, M, ipſi N ſunt æquales, quandoquidem M ipſius D eſt tripla; ambæ autem, M, D, ipſius D ſunt quadruplæ. Eſt vero etiam N ipſius C quadrupla. Quare

τοῦ EB, καὶ τὸ K τοῦ Γ. καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ M· καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον, πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ K. εἰλήφθω καὶ ἔστω τὸ N, τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ K. ἐπεὶ οὖν τὸ K τοῦ N πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ K ἄρα τοῦ M οὐκ ἔστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE, καὶ τὸ HΘ τοῦ EB, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE, καὶ τὸ ZΘ τοῦ AB. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE, καὶ τὸ K τοῦ Γ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZΘ τοῦ AB, καὶ τὸ K τοῦ Γ. τὰ ZΘ, K ἄρα τῶν A B, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ HΘ τοῦ EB, καὶ τὸ K τοῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ EB τῷ Γ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ HΘ τῷ K. τὸ δὲ K τοῦ M οὐκ ἔστιν ἔλαττον. οὐδ' ἄρα τὸ HΘ τοῦ M ἔλαττόν ἐστι. μεῖζον δὲ τὸ ZH τοῦ Δ. ὅλον ἄρα τὸ ZΘ συναμφοτέρων, τῶν Δ, M, μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα, τὰ Δ, M, τῷ N ἐστὶν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ M τοῦ Δ τριπλάσιον ἐστί· συναμφότερα δέ, τὰ M, Δ, τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια. ἔστι δὲ καὶ τὸ N τοῦ Δ τετραπλάσιον. συναμφότερα

ἄρα, τὰ M, Δ, *τῷ* N *ἴσα ἐσίν· ἀλλὰ τὸ* ZΘ *τῶν* M, Δ *μεῖζον ἐσίν. τὸ* ZΘ *ἄρα τοῦ* N *ὑπερέχει. τὸ δὲ* K *τοῦ* N *οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔσι τὰ μὲν* ZΘ, K, *τῶν* AB, Γ *ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ δὲ* N *τοῦ* Δ *ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον. τὸ* AB *ἄρα πρὸς τὸ* Δ *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ* Γ *πρὸς τὸ* Δ. *Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὸ* Δ *πρὸς τὸ* Γ *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ* Δ *πρὸς τὸ* AB. *τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν* N *τοῦ* K *ὑπερέχει, τὸ δὲ* N *τοῦ* ZΘ *οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔσι τὸ μὲν* N *τοῦ* Δ *πολλαπλάσιον· τὰ δὲ* ZΘ, K, *τῶν* AB, Γ, *ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. τὸ* Δ *ἄρα πρὸς τὸ* Γ *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ* Δ *πρὸς τὸ* AB.

Ἀλλὰ δὴ τὸ AE *μεῖζον ἔσω τοῦ* EB. *τὸ δὴ ἔλαττον, τὸ* EB, *πολλαπλασιαζόμενον ἔσαι ποτὲ τοῦ* Δ *μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔσω τὸ* HΘ, *πολλαπλάσιον μὲν τοῦ* EB, *μεῖζον δὲ τοῦ* Δ. *καὶ ὁσαπλάσιόν ἐσι τὸ* HΘ *τοῦ* EB, *τοσαυταπλάσιον γεγο-*

ambæ, M, D, ipſi N ſunt æquales. Sed F H ipſis M, D, major eſt. igitur F H ſuperat ipſam N; at K non ſuperat ipſam N. Suntque F H, K, ipſarum A B, C æque multiplæ; & N alia quædam multipla. Ergo AB ad D majorem rationem habet quàm C ad D. Dico porro, D ad C majorem rationem habere quàm D ad A B. Iiſdem enim conſtructis ſimiliter monſtrabimus, quod N ſuperet ipſam K; at N non ſuperet ipſam FH. Eſtque N ipſius D multipla, & F H, K, ipſarum A B, C, aliæ quædam æque multiplæ. Quare D ad C majorem rationem habet quam D ad A B.



Cæterum ſit AE major quàm E B. Minor autem EB, ſi multiplicetur, major aliquando erit quàm D. Multiplicetur, ſitque G H, multipla ipſius E B, & major quàm D. Et quotupla eſt G H ipſius E B, totu-

pla fiat & F G ipſius A E, & K ipſius C. Jam ſimiliter monſtrabimus, magnitudines F H, K, ipſarum AB, C æque eſſe multiplas. Sumaturque ſimiliter N, multipla ipſius D, primo autem major ipſâ F G. Itaque rurſus F G non eſt minor quàm M: major autem GH quàm D. Tota ergo F H ipſas D, M, hoc eſt, N, ſuperat. at K ipſam N non ſuperat; quoniam & FG, major exiſtens quam GH, id eſt, K, ipſam N non ſuperat. Et ſimili modo, ſuperiora ſequentes, demonſtrationem perficimus. Quare Inæqualium magnitudinum major, ad eandem, majorem rationem habet quàm minor: & eadem, ad minorem, majorem rationem habet quàm ad majorem. Quod monſtrare oportebat.

νέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ *τοῦ* ΑΕ, *τὸ δὲ* Κ *τοῦ* Γ. *ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ* ΖΘ, Κ, *τῶν* ΑΒ, Γ *ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ* Ν, *πολλαπλάσιον μὲν τοῦ* Δ, *πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ* Ζ Η. *ὥς τε πάλιν τὸ* ΖΗ *τοῦ* Μ *οὐκ ἔστιν ἔλαττον· μεῖζον δὲ τὸ* Η Θ *τοῦ* Δ. *ὅλον ἄρα τὸ* Ζ Θ *τῶν* Δ, Μ, *τουτέστι, τοῦ* Ν, *ὑπερέχει. τὸ δὲ* Κ *τοῦ* Ν *οὐχ ὑπερέχει. ἐπειδήπερ καὶ τὸ* ΖΗ, *μεῖζον ὂν τοῦ* Η Θ, *τουτέστι, τοῦ* Κ, *τοῦ* Ν *οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω, περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Quod huic propoſitioni ſcholium Commandinus adtexuit, non ipſius, ſed antiquum videtur. Suis enim nomen proprium addit. Et pro iis verbis, *per eam diſfinitionem, quæ dicit*, ſimpliciter poſuiſſet, *per diffinitionem ſeptimam.*

S C H O L I U M.

ERgo AB ad D majorem proportionem habet, quàm C ad D.] Quattuor ſunt magnitudines, prima quidem A B, ſecunda D, tertia autem C, & quarta D. bis enim ſumitur D, & ut ſecunda, & ut quarta. atque eſt primæ quidem AB multiplex FH;

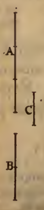
ſecundæ verò D, multiplex N; & tertiæ C multiplex K. eſt igitur F H major quàm N; quæ quidem N multiplex eſt ſecundæ D; K verò, multiplex tertiæ C, minor eſt quàm N, quæ eſt multiplex quartæ D. Itaque quoniam multiplex primæ major eſt multiplici ſecundæ; multiplex autem tertiæ non major multiplici quartæ; habebit AB ad D majorem proportionem quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quæ dicit, Quando æque multiplicium multiplex quidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex autem tertiæ non ſuperaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad ſecundam majorem proportionem habere dicetur quàm tertia ad quartam.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIB. V.
PROPOSITIO X.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν. 15

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major eſt: ad quam verò eadem majorem rationem habet, illa minor eſt.

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β. ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β, πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ. οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ



Habeat enim A ad C majorem rationẽ quam B ad C. Dico A majorem eſſe quàm B. Quod ſi non, aut æqualis eſt A ipſi B, aut minor. Æqualis autem non eſt A ipſi B. utraque enim ipſarum A, B, ad C eandem haberet rationem. atqui non habet. Ergo A ipſi B non eſt æqualis. Sed nec minor eſt A quàm B. quippe A ad C minorem rationem haberet quàm B ad C. at-

qui non habet. Quare A non eſt minor quam B. Monſtrata autem eſt nec æqualis eſſe. Ergo A major eſt quàm B. Habeat rurſus C ad B majorem rationem quàm C ad A. Dico B minorem eſſe quam A. Quod ſi non, aut æqualis eſt, aut major. Jam vero æqualis non eſt B ipſi A. quippe C ad utramque ipſarum A, B, eandem haberet rationem. atqui non habet. Ergo A ipſi B non eſt æqualis. Sed nec B major eſt quàm A. quippe C ad B minorem haberet rationem, quàm ad A. atqui non habet. Ergo B non eſt major quàm A. Monſtrata autem eſt nec æqualis eſſe. Ergo B minor eſt quam A. Quare ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major eſt: ad quam verò eadem majorem rationem habet, illa minor eſt. quod monſtrare oportebat.

ἔχει δέ. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α. λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσόν ἐστιν, ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α. τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β, τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ. οὐκ ἄρα ἴσόν ἐστι τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ. οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον. ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ μείζονα λόγον ἔχον, μεῖζόν ἐστι· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσον ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ARCHIMEDIS DE SPHÆRA & Cylindro libri I.

Propoſitio II.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus, poſſibile eſt invenire duas rectas inæquales, quarum major ad minorem, minorem habeat rationem quàm major magnitudo ad minorem.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ σφαίρας καὶ κυλίνδρου βιβλίου Α΄ πρότασις Β΄.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥς τε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ ΑΒ, Δ. καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ. λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ Δ ἴσον τὸ ΒΓ. καὶ κείσθω τὶς εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ. τὸ δὴ ΑΓ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ ΑΘ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΘΑ τοῦ ΑΓ, τοσαπλάσιος ἔστω ἡ ΖΗ τῆς ΗΕ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΘΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ. καὶ ἀνάπαλιν ἔστιν, ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως τὸ ΓΑ πρὸς ΑΘ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΘ τοῦ Δ, τουτέστι, τοῦ ΓΒ. τὸ ἄρα ΓΑ πρὸς ΑΘ λόγον ἐλάσσονα ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ. καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ. ἴσον δὲ τὸ ΒΓ τῷ Δ. ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ. εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ ἐπίταγμα, τουτέστι, τὴν



Sint duæ magnitudines inæquales, A B, D. ſitque major A B. Dico, poſſibile eſſe invenire duas rectas inæquales, quæ id, quod diximus, imperatum faciant. Ponatur, per ſecundam primi Elementorum Euclidis, ipſi D æqualis B C. Deinde ponatur recta quædam, linea F G. Jam vero magnitudo A C ſibimet ſuperaddita ſuperabit aliquando ipſam D. Multiplicetur ergo, & ſit A H. & quàm multipla eſt magnitudo H A ipſius A C, tàm multipla ſit linea F G ipſius G E. Eſt igitur, ut H A ad A C, ita F G ad G E. & revertendo eſt, ut E G ad G F, ſic C A ad A H. Et quoniam magnitudo A H major eſt magnitudine D, hoc eſt C B; ideo C A ad A H rationem minorem habet quam A C ad C B. & componenti, recta ergo E F ad F G minorem rationem habet quàm magnitudo A B ad B C. At vero æqualis eſt B C ipſi D. quare E F ad F G minorem rationem habet quàm A B ad D. Itaque inventæ ſunt duæ rectæ inæquales, imperatum exhibentes; id eſt, majorem

ad minorem habere minorem rationem, quàm major magnitudo ad minorem.

μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

EUTOCII COMMENTARIUS.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ.

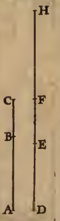
JAm verò magnitudo A C ſibimet ſuperaddita ſuperabit ipſam D.] Scilicet ipſâ AB aut ſuperparticulari, aut etiam ſuperperte, exiſtente ipſius D. Quod ſi A B aut multipla fuerit ipſius D, aut multiplaſuperparticularis, aut etiam multiplaſuperpers, ablatâ ab A B ipſâ B C, quæ æqualis ſit ipſi D, reliqua CA ſuperabit ipſam D. adeo ut nunquam ipſa CA multiplicanda ſit, ſed inde ipſi AC æqualem deſecare oporteat ipſam A H, eandemq; demonſtrationem adcommodare.

ΤΟ δὴ ΑΓ ἑαυτῷ ἐπισυντεθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ.] Δηλαδὴ ὡς τοῦ ΑΒ ἤτοι ἐπιμορίου, ἢ καὶ ἐπιμεροῦς, τυγχάνοντος τοῦ Δ. εἰ δὲ εἴη τὸ ΑΒ τοῦ Δ ἤτοι πολλαπλάσιον, ἢ πολλαπλασιεπιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ ΑΒ, ἴσου τῷ Δ τοῦ ΒΓ, τὸ λοιπὸν τὸ ΓΑ ὑπερέξει τοῦ Δ. ὥς τε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτὸ, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ ΑΓ ἴσον ἀπολιθέσθαι τὸ Α Θ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν.

Et componenti recta ergo E F ad F G minorem rationem habet quàm magnitudo AB ad BC.] Quod enim, ſi prima ad ſecundam minorem rationem habeat quàm tertia ad quartam, etiam componenti eadem ratio ſequatur, ſic monſtrabitur. Sint quatuor magnitudines, AB, BC, DE, EF. & AB ad BC majorem rationem habeat quàm D E ad EF. Dico, etiam componenti AC ad CB majorem rationem habere quàm DF ad FE. Fiat

Καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ.] Ὅτι γὰρ, ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ, δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη, τὰ ΑΒ. ΒΓ. ΔΕ. ΕΖ. τὸ δὲ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ. γεγονέτω γὰρ, ὡς τὸ

ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ, οὕτως τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΖΘ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. καὶ τὸ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΕ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΖ τοῦ ΕΔ. καὶ ὅλον τὸ ΘΕ τοῦ ΔΖ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ. διὰ τὸ συνθέντι καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. πάλιν γὰρ ὁμοίως, ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΘ, καὶ τὸ ΕΘ μεῖζον τοῦ ΔΖ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΕΖ, ἔσται μεῖζον τὸ ΘΖ τοῦ ΔΕ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ΘΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι, τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ, διὰ τὸ διελόντι, μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. Φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ συνθέντι,



enim, ut CB ad BA, ſic EF ad FH. revertendo igitur, ut AB ad BC, ſic HF ad FE. At majorem rationem habet AB ad BC quàm DE ad EF. Ergo & HF ad FE majorem rationem habet quàm DE ad EF. Major itaque eſt HF quàm ED. & tota HE quàm DF. & propterea HE ad EF majorem rationem habet quàm DF ad FE. Sed ut HE ad EF, ita AC ad CB, propter componenti. Ergo etiam AC ad CB majorem rationem habet quàm DF ad FE. At verò AC ad CB majorem rationem habeat quàm DF ad FE. Dico etiam dividenti AB ad BC majorem rationem habere quàm DE ad EF. Rurſus enim ſimili modo, ſi faciamus, ut BC ad CA, ſic FE ad EH, erit EH major quàm DF. & communi magnitudine EF ablatâ, erit HF major quàm DE. & propterea HF ad FE, hoc eſt, AB ad BC, propter dividenti, majorem rationem habebit quàm DE ad EF. Perſpicuum autem eſt per ſimiles argumentationes, etiamſi AB ad BC minorem rationem habeat quàm DE ad EF, & com-

ponenti, & rurſus dividenti, eandem fore rationem. Ex iiſdem autem & convertentis ratio eſt manifeſta. Habeat enim AC ad CB majorem rationem quàm DF ad FE. Dico, etiam convertenti C A ad A B minorem rationem habere quàm F D ad D E. Quoniam enim AC ad CB majorem rationem habet quàm DF ad FE, etiam dividenti AB ad B C majorem rationem habet quàm DE ad EF. revertendo CB ad BA minorem rationem habet quàm FE ad ED. & componenti, CA ad AB minorem rationem habet quàm FD ad DE.

καὶ πάλιν διελόντι, ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. Ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς ΔΕ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ, καὶ διελόντι τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ. καὶ συνθέντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς ΔΕ.

ARCHIMEDIS DE SPHÆRA & Cylindro libri II. Propoſitio VIII.

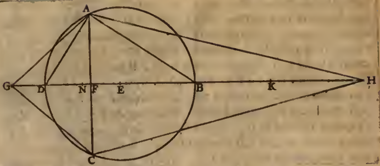
ΤΩ͂Ν ἈΡΧΙΜΗ'ΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοῦ β′ πρότασις η′.

SI ſphæra plano ſecetur, non per centrum; majus ſegmentum ad minus, minorem quidem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet majoris ſegmenti ſuperficies ad minoris ſuperficiem; majorem verò quàm ſeſquialteram.

ἘΑΝ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Sit ſphæra, & maximus in ea circulus ABCD. & diametrus BD. Secetur autem plano per A C, recto ad circulum ABCD. ſitque majus ſphæræ

Ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. καὶ διάμετρος ἡ ΒΔ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς ΑΓ, ὀρθῷ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. καὶ ἔστω



μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΓ. *λέγω ὅτι τὸ* ΑΒΓ *τμῆμα πρὸς τὸ* ΑΔΓ, *ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ* ΒΑΔ. *καὶ ἔστω κέντρον τὸ* Ε. *καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ* ΕΔΖ *πρὸς* ΔΖ, *ἡ* ΘΖ *πρὸς* ΖΒ· *ὡς δὲ συναμφότερος ἡ* ΕΒΖ *πρὸς* ΒΖ, *οὕτως ἡ* ΗΖ *πρὸς* ΖΔ. *καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, βάσιν μὲν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον* ΑΖΓ *κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ* Θ, Η *σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν* ΑΘΓ *κῶνος τῷ* ΑΒΓ *τμήματι τῆς σφαίρας· ὁ δὲ* ΑΓΗ *τῷ* ΑΔΓ. *καὶ ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ* ΒΑ *πρὸς τὸ ἀπὸ* ΑΔ, *οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ* ΑΒΓ *τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ* ΑΔΓ *τμήματος. τοῦτο γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον*

ſegmentum ABC. Dico, ſegmentum ABC ad ſegmentum ADC, minorem quidem rationem habere quàm duplam ejus, quam habet ſuperficies majoris ſegmenti ad ſuperficiem ſegmenti minoris; majorem vero quàm ſeſquialteram. Jungantur enim B A, AD. ſitque centrum E. & fiat, ut ambæ EDF ad DF, ita HF ad FB; ut verò ambæ EBF ad BF, ſic GF ad FD. Intelligantur verò coni, baſin habentes circa diametrum AFC exiſtentem circulum, vertices autem H, G puncta. eritque æqualis AHC conus ſegmento ſphæræ ABC; & conus ACG ſegmento ADC. Et eſt, ut quadratum à B A ad quadratum ab AD, ita ſuperficies ſegmenti ABC ad ſuperficiem ſegmenti ADC. Hoc enim ſuprà ſcriptum eſt. Monſtrandum, majus ſphæræ ſegmentum ad

minus, minorem rationem habere quàm duplam ejus, quam habet ſuperficies majoris ſegmenti ad ſuperficiem ſegmenti minoris. Dico, etiam conum A H C ad conum A G C, id eſt, H F ad F G, minorem rationem habere quàm duplam ejus, quam habet quadratum à B A ad quadratum ab A D, id eſt, B F ad F D. Quoniam enim eſt, ut ambæ E D F ad D F, ſic H F ad F B; erit etiam, ut B F ad F D, ſic H B ad B E. æqualis enim eſt B E ipſi D E. hoc enim in ſuperioribus quoque eſt demonſtratum. Rurſus quoniam eſt, ut ambæ E B F ad B F, ita G F ad F D. ſit ipſi B E æqualis B K: evidens enim, majorem eſſe H B quàm B E, quia & B F major quàm F D: eritque, ut K F ad F B, ita G F ad F D. ut autem B F ad F D, ſic monſtrata eſt H B ad B E. at æqualis eſt B E ipſi B K. Quare ut H B ad B K, ſic K F ad F G. Et quoniam H F ad F K minorem rationem habet quàm H B ad B K; ut autem H B ad B K, ſic monſtrata eſt K F ad F G; Ergo H F ad F K minorem rationem habet quàm K F ad F G. Itaque minus eſt rectangulum ab H F G, quadrato ab F K. ergo rectangulum ab H F G

τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι ϗ ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ, τουτέστιν, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. ϗ ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ· ἔσται ϗ ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ. ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ. ἔστω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΚ. δῆλον γὰρ ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἡ ΘΒ τῆς ΒΕ, ἐπεὶ ϗ ἡ ΒΖ τῆς ΖΔ. ϗ ἔσται, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ· ὡς δὲ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, ἐδείχθη ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΚ. ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ· ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ἐδείχθη ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΖΗ

πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστιν, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ. ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΕ, τουτέστι, τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΚ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΝ τῷ ὑπὸ ΘΒΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. καὶ τὸ ἀπὸ ΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τουτέστιν, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν,

ad quadratum ab FG, hoc eſt, HF ad FG, minorem rationem habet quàm quadratum à KF ad quadratum ab FG. At quadratum à KF ad quadratum ab FG duplam rationem habet rationis KF ad FG. Ergo HF ad FG minorem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet KF ad FG. Ergo & HF ad FG minorem rationem habet quàm duplam rationis quadrati à BA ad quadratum ab AD, hoc eſt, rectæ BF ad FD. Hoc autem quærebamus. Et quoniam BE æqualis eſt ipſi ED, minus ergo eſt rectangulum à BFD rectangulo à BED. ergo FB ad BE minorem rationem habet quàm ED ad DF, hoc eſt, HB ad BF. Quare minus eſt quadratum ab FB rectangulo ab HBE, id eſt, rectangulo ab HBK. Sit quadratum à BN æquale rectangulo ab HBK. Eſt igitur, ut HB ad BK, ſic quadratum ab HN ad quadratum ab NK. at quadratum ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm quadratum ab HN ad quadratum ab NK. Ergo & quadratum ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm HB ad BK, hoc eſt, HB ad BE,

hoc eſt, KF ad FG. Ergo HF ad FG majorem rationem habet quàm ſeſquialteram rationis KF ad FG. Hoc autem intendebamus. Et eſt, ut HF ad FG, ſic conus AHC ad conum AGC, id eſt, ſegmentum ABC ad ſegmentum ADC. ut autem KF ad FG, ita BF ad FD; id eſt, quadratum à BA ad quadratum ab AD; id eſt, ſuperficies ſegmenti ABC ad ſuperficiem ſegmenti ADC. Ergo majus ſegmentum ad minus, minorem quidem habet rationem quàm duplam ejus, quam habet ſuperficies majoris ſegmenti ad ſuperficiem ſegmenti minoris; majorem verò quàm ſeſquialteram.

ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ΚΖ πρὸς ΖΗ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. καὶ ἔστω, ὡς μὲν ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ κῶνον· τουτέστι, τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. τουτέστι, τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· τουτέστιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος. ἄλλοτε τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

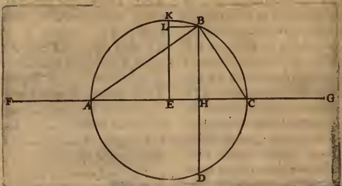
ALITER

Sit ſphæra, in qua maximus circulus, ABCD. & diametrus, recta AC. centrum verò, punctum E. & ſecetur plano per rectam BD, recto ad AC. Dico, majus ſegmentum DAB ad minus BCD, minorem quàm duplam rationem habere ejus, quam habet ſuperficies ſegmenti ABD ad ſuperficiem ſegmenti BCD; majorem verò quàm ſeſquialteram. Jungantur enim AB, BC. Superficiei verò ad ſuperficiem ratio eſt circuli, cujus

ἌΛΛΩϹ.

Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· διάμετρος δὲ ἡ ΑΓ· κέντρον δὲ τὸ Ε. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς ΒΔ, πρὸς τὴν ΑΓ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα, τὸ ΔΑΒ, πρὸς τὸ ἔλασσον, τὸ ΒΓΔ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ τμήματος· μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος ὁ τοῦ κύκλου

ἐστὶν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΒ, *πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ* ΒΓ, *τουτέστιν, ὁ τῆς* ΑΘ *πρὸς τὴν* ΘΓ. *κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν* ΑΖ, ΓΗ·



ὁ δὲ τοῦ ΒΑΔ *τμήματος πρὸς τὸ* ΒΓΔ *λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ* ΒΑΔ *τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν* ΒΔ *κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ* Α *σημεῖον· καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, κορυφὴν δὲ τὸ* Γ *σημεῖον· καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ* ΒΓΔ *τμῆμα. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ* ΒΑΔ *τμήματος λόγος πρὸς τὸν* ΒΑΔ *κῶνον, ὁ τῆς* ΗΘ *ἐστὶ πρὸς* ΘΓ· *ὁ δὲ τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον, ὁ τῆς* ΑΘ *πρὸς* ΘΓ· *ὁ δὲ τοῦ* ΒΓΔ *κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ* ΒΓΔ, *ὁ τῆς* ΑΘ *ἐστὶ πρὸς* ΘΖ. *ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς* ΗΘ *πρὸς* ΘΓ, *καὶ τῆς* ΑΘ *πρὸς* ΘΓ, *ὁ*

radius AB, ad circulum, cujus radius BC; hoc eſt, rectæ AH ad HC. Ponatur circuli radio æqualis utraque ipſarum AF, CG. Porrò ſegmenti BAD ad ſegmentum BCD ratio conjuncta eſt ex ea, quam habet ſegmentum BAD ad conum, cujus quidem baſis eſt circulus circa diametrum BD, vertex autem punctum A; & idem conus ad conum, qui eandem habet baſin, at verticem, punctum C; & dictus conus ad ſegmentum BCD. Sed ſegmenti BAD ratio ad conum BAD, eſt rectæ GH ad HC; & coni ad conum, rectæ AH ad HC; & coni BCD ad ſegmentum BCD, rectæ AH ad HF. Conjuncta autem ratio ex ratione rectæ GH ad HC, & rectæ AH ad HC, eſt ratio rectanguli

ab AHG ad quadratum ab HC: & ratio rectanguli à GH, HA ad quadratum ab HC, una cum ratione rectæ AH ad HF, eſt ratio rectanguli à GH, HA in HA, ad quadratum HC in HF. At verò ratio rectanguli à GHA in HA, ad quadratum ab HC in HG, eſt ratio quadrati ab HA ad quadratum ab HC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm duplam rationis AH ad HC, hoc eſt, quadrati ab AH ad quadratum ab HC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HG. Ergo majus eſt quadratum à CH in HF, quadrato à CH in HG. Quare major eſt recta HF quàm HG. Porro dico, etiam majus ſegmentum ad minus, majorem rationem habere quàm ſeſquialteram rationis ſuperficiei ad ſuperficiem. At ſegmentorum ratio monſtrata eſt eadem, quam habet quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF. Rationis autem ſuperficiei ad ſuperficiem ſeſquialtera eſt ratio cubi ab AB ad cubum à BC. Dico quoque,

τῦ ὑπὸ τῶν ΑΘΗ ἐςὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ὁ δὲ τῦ ὑπὸ ΗΘ, ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, μετὰ τῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ, ὁ τῦ ὑπὸ τῶν ΗΘ, ΘΑ ἐςὶν ἐπὶ τὴν ΘΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ὁ δὲ τῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ, ὁ τῦ ἀπὸ τ ΘΑ ἐςὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσονα λόγον ἔχει τῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίυ, ὅς ἐςιν τῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐςι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, τῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὅτι ἄρα μείζων ἐςὶν ἡ ΘΖ τῆς ΘΗ. Φημὶ δὴ ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασον, λόγον μείζονα ἔχει ἢ ἡμιόλιον τῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγυ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. τῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγυ ἡμιόλιός ἐςιν ὁ τῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβυ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον. Φημὶ δὴ, ὅτι τὸ ἀπὸ

ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον· τουτέστιν, ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον· τουτέστιν, ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ, ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. Φημὶ δή, ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ· τουτέστι, τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὃ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῷ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς

quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habere quàm cubus ab AB ad cubum à BC; hoc eſt, cubus ab AH ad cubum ab HB; hoc eſt, ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, & rectæ AH ad HB. At ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, aſſumtâ ratione rectæ AH ad HB, eſt ratio quadrati ab AH ad rectangulum à BHC. Et ratio quadrati ab AH ad rectangulum à BHC, eſt ratio quadrati ab AH in HG, ad rectangulum à BHC in HG. Atque hinc quoque dico, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habere quàm quadratum ab AH ad rectangulum à BHC; hoc eſt, quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à BHC in HG. Monſtrandum igitur, quadratum à CH in HF minus eſſe rectangulo à BHC in HG. Quod idem eſt ac monſtrare, quadratum à CH ad rectangulum à BHC, minorem rationem habere quàm habeat recta GH ad HF. Monſtrare itaque oportet, rectam GH ad HF majorem rationem habere quàm CH ad HB. Ducatur à puncto E ipſi EC ad angulos

rectos EK. & à puncto B perpendicularis ſuper ipſam, B L. Monſtrandum nobis reſtat, quare GH ad HF majorem rationem habeat quàm CH ad HB. æqualis autem eſt HF ambabus, AH, KE. Monſtrare igitur oportet, rectam GH ad ambas, AH, KE, majorem rationem habere quàm CH ad HB. adeoque CH ablatâ ab HG; & LE, quæ æqualis eſt ipſi BH, ab EK; monſtrandum erit, reliquam CG ad reliquas ambas, AH, KL, majorem rationem habere quàm CH ad HB, hoc eſt, HB ad HA, hoc eſt, LE ad HA. & permutando KE ad EL majorem rationem habere quàm habeant ambæ KL, HA ad HA. & dividenti, KL ad LE majorem rationem habere quàm KL ad HA, quia minor eſt LE quàm HA.

ἡ ΕΚ. καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν, ἡ ΒΛ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΘ, ΚΕ. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφότερον τὴν ΑΘ, ΚΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΗ τῆς ΓΘ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΕ τῆς ΕΛ, ἴσης τῇ ΒΘ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ ΓΗ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον, τὴν ΑΘ, ΚΛ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ· τουτέστιν, ἡ ΘΒ πρὸς ΘΑ· τουτέστιν, ἡ ΛΕ πρὸς ΘΑ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ ΚΕ πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΘΑ πρὸς ΘΑ. καὶ διελόντι, ἡ ΚΛ πρὸς ΛΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΛ πρὸς ΘΑ, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΕ τῆς ΘΑ.

EUTOCII COMMENTARIUS in I. demonſtrationem.

ἘΥΤΟΚΊΟΥ ὙΠΟΜΝΗΜΑ.

Recta HF ad FG minorem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet quadratum à BA ad quadratum ab AD; hoc eſt, BF ad FD.] Quoniam enim in triangulo rectangulo ab angulo recto perpendicularis ducta eſt AF, triangulis ad perpendicularem

Ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· τουτέστιν, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ.] Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ ΑΖ, τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἐστιν,

ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΑΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΖ, τῆς ΒΔ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. καὶ ἐστι τῷ μὲν ὑπὸ ΔΒΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΑ· τῷ δὲ ὑπὸ ΒΔΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΔ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ.

exiſtentibus ſimilibus, eſt ut FB ad BA, ſic AB ad BD. & ut prima ad tertiam, ſic quadratum à prima ad quadratum à ſecunda; & quadratum à ſecunda ad quadratum à tertia, ut ſuperius eſt monſtratum. Ut ergo FB ad BD, ſic quadratum ab AB ad quadratum à BD. Sed ut BD ad DF, ſic quadratum à BD ad quadratum à DA. Ut enim prima ad tertiam, ſic quadratum à prima ad quadratum à ſecunda. Ergo & ex æquali, ut quadratum à BA ad quadratum ab AD, ſic BF ad FD. Sed & alio modo idem colligi poſſit ſic. Quia enim eſt, ut BF ad FD, ſic rectangulum à DBF ad rectangulum à BDF, rectâ BD communi altitudine ſumtâ. eſtque rectangulo à DBF æquale quadratum à BA; & rectangulo à BDF æquale quadratum ab AD. Ergo ut quadratum à BA ad quadratum ab AD, ſic BF ad FD.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ.] Καθόλου γὰρ, ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν.

Et quia HF ad FK minorem rationem habet quàm HB ad BK.] Univerſaliter enim, ſi ſint duæ magnitudines inæquales, & æquales illis addantur, major ad minorem, majorem rationem habet quàm compoſita ad compoſitam.

Sint enim duæ rectæ inæquales, AB, CD. & adpoſitæ ſint illis æquales BE, DF. Dico AB ad CD majorem rationem habere quàm AE ad CF. Quia enim major eſt AB quàm CD; AB ergó ad BE majorem rationem habet quàm CD ad BE, id eſt, ad DF. Quare & componenti AE ad EB majorem rationem habet quàm CF ad DF, ob prius demonſtrata.



ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, αἱ ΑΒ, ΓΔ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι, αἱ ΒΕ, ΔΖ. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΕ, τουτέστι, πρὸς ΔΖ. ὥς τε καὶ συνθέντι ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΔΖ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Minus ergo eſt rectangulum ab HFG quadrato ab FK.] Si enim ſint tres rectæ continuæ, ut A, B, C. ita ut A ad B minorem rationem habeat quàm B ad C; rectangulum ab extremis A, C, minus eſt quadrato à media B. Si enim faciamus, ut A ad B, ſic B ad aliam quandam, erit ad majorem quàm C; ſeu minuere oportet rationem ipſius B ad C. eritque rectangulum ab A, & majore, C, æquale quadrato à B. ut rectangulum ab A, C, ſit minus quadrato à B.



Ἔλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ.] Ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ Α, Β, Γ. ὥς τε τὴν Α πρὸς τὴν Β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὴν Β πρὸς τὴν Γ· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, τῶν Α, Γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης, τῆς Β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν Α πρὸς Β, οὕτως τὴν Β πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς Γ· ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς Β πρὸς Γ λόγον. καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς Α, καὶ τῆς μείζονος, τῆς Γ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Β. ὥς τε τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς Β.

Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· τουτέστιν, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ὡς γὰρ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλασσον.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ.] Τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΔ. τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖΔ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον, ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἀφέστηκεν τὸ Ζ μεῖζον, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων. ὥς τε εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

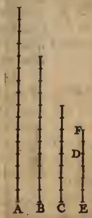
Ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ.] Καθόλου γὰρ, ἐὰν ὦσι

Quare rectangulum ab HFG ad quadratum ab FG; id eſt, HF ad FG, minorem rationem habet quàm quadratum à KF ad quadratum ab FG. Ut enim HF ad FG, ſic rectangulum ab HFG ad quadratum ab FG. At rectangulum ab HFG minus eſt quadrato ab FK. Major autem magnitudo, ad eandem, majorem rationem habet, quàm minor.

Et quia æqualis eſt recta BE ipſi ED; minus ergo rectangulum à BFD rectangulo à BED.] Etenim rectangulum à BED æquale eſt quadrato ab ED: at rectangulum à BFD, una cum quadrato ab EF, eidem æquale eſt. Et manifeſtũ, quo à biſectione magis diſtat punctum F, eò minus eſſe rectangulum à BFD rectangulo ab æqualibus. quippe una cum quadrato à recta inter ſectiones ſitâ, æquale ſit rectangulo ab æqualibus. adeo ut, quamvis recta in inæquales partes ſecetur in alio atque alio puncto, rectangulum à ſegmentis biſectioni propioribus, majus ſit rectangulo à ſegmentis remotioribus.

Ergo FB ad BE minorem rationem habet quàm ED ad DF.] Univerſaliter enim, ſi

ſint quatuor termini, ut A, B, C, DE. & ſit contentum ab A, DE minus contento à B, C; A ad B minorem rationem habet quàm C ad DE. Sit enim contentum à B, C æquale contento ab A, FE. Eſt igitur, ut A ad B, ita C ad FE. at C ad FE minorem rationem habet quàm ad E D. Ergo etiam A ad B minorem rationem habet quàm C ad DE.



τέσσαρες ὅροι, ὡς οἱ A, B, Γ, ΔE. καὶ ἡ τὸ ὑπὸ τῶν A, ΔE ἔλασσον τοῦ ὑπὸ B, Γ· ὁ A πρὸς τὸν B ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς ΔE. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον τῷ ὑπὸ τοῦ A, ZE. ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ὁ Γ πρὸς τὸν ZE. ὁ δὲ Γ πρὸς τὸν ZE ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν EΔ. καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς ΔE.

Eſt igitur, ut HB ad BK, ſic quadratum ab HN ad quadratum ab NK.] Quia enim rectangulo ab HBK æquale eſt quadratum à BN, tres rectæ proportionales ſunt, ut HB ad BN, ſic NB ad BK. & ut prima ad tertiam, HB ad BK, ſic quadratum à ſecunda ad quadratum à tertia; id eſt, quadratum à BN ad quadratum à BK, ut ſuperius eſt monſtratum. Rurſus quoniam eſt, ut HB ad BN, ita NB ad BK; componenti, ut HN ad NB, ſic NK ad KB. permutando, ut HN ad NK, ſic NB ad BK. Quare etiam ut quadratum ab HN ad quadratum ab NK, ſic

Ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘB πρὸς BK, τὸ ἀπὸ ΘN πρὸς τὸ ἀπὸ NK.] Ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ ΘBK ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ BN, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσὶν, ὡς ἡ ΘB πρὸς BN, ἡ NB πρὸς BK. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ ΘB πρὸς BK, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης· τουτέστι, τὸ ἀπὸ BN πρὸς τὸ ἀπὸ BK, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ΘB πρὸς BN, ἡ NB πρὸς BK. συνθέντι, ὡς ἡ ΘN πρὸς NB, ἡ NK πρὸς KB. ἐναλλὰξ, ὡς ἡ ΘN πρὸς NK, ἡ NB πρὸς BK. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘN πρὸς τὸ ἀπὸ NK, οὕτως τὸ ἀπὸ

ΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ.

quadratum ab NB ad quadratum à BK. Sed ut quadratum ab NB ad quadratum à BK, ſic monſtrata eſt HB ad BK. Quare etiam ut HB ad BK, ſic quadratum ab HN ad quadratum ab NK.

Τὸ δὲ ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ.] Πάλιν γὰρ δύο ἀνίσοις, ταῖς ΘΖ, ΖΚ, πρόσκειται ἡ ΝΖ. καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΝ πρὸς ΝΚ. ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· τουτέστιν, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ· τουτέστιν, ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ΚΖ πρὸς ΖΗ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ ΑΒ, Γ, Δ. ὥστε τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὴν Γ πρὸς τὴν Δ. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς Δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε. ἐπεὶ οὖν

At quadratum ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm quadratum ab HN ad quadratum ab NK.] Rurſus enim duabus inæqualibus, HF, FK, adjecta eſt recta NF. & ob ſuperius dictum, HF ad FK majorem rationem habet quàm HN ad NK. quare & dupla. Quadratum igitur ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm quadratum ab HN ad quadratum ab NK; id eſt, HB ad BE; id eſt, KF ad FG. Ergo HF ad FG majorem rationem habet quàm ſeſquialteram rationis KF ad FG. Intelligantur enim ſeorſim poſitæ rectæ, ut AB, C, D. ita ut quadratum ab AB ad quadratum à C, majorem rationem habeat quàm recta C ad D. Dico, rectam AB ad D majorem quàm ſeſquialteram rationem habere ejus quam habet C ad D. Sumatur enim inter C, D media proportionalis, E. Quoniam igitur quadratum

ab AB ad quadratum à C, majorem rationem habet quàm C ad D; ratio autem quadrati ab AB ad quadratum à C, dupla eſt rationis AB ad C; & ratio ipſius C ad D dupla eſt rationis C ad E: ergo & AB ad C majorem rationem habet quàm C ad E. Fiat igitur, ut E ad C, ita C ad BF. & quia quatuor ſunt rectæ deinceps proportionales, BF, C, E, D; ergo BF ad D triplam rationem habet rationis BF ad C; hoc eſt, rationis C ad E. Sed & C ad D duplam rationem habet rationis C ad E. Quare BF ad D ſeſquialteram rationem habet rationis C ad D. Ergo AB ad D majorem rationem habet quàm ſeſquialteram ejus, quam habet C ad D.



τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ λόγος διπλάσιός ἐστιν τοῦ τῆς AB πρὸς Γ· ὁ δὲ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς Ε· καὶ ἡ AB ἄρα πρὸς Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς Ε. γεγονέτω οὖν, ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς ΒΖ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν, αἱ ΒΖ, Γ, Ε, Δ· ἡ ΒΖ ἄρα πρὸς Δ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΖ πρὸς Γ· τουτέστιν, ἡ Γ πρὸς Ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς Γ πρὸς Ε. ἡ ἄρα ΒΖ πρὸς Δ [ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ τῆς Γ πρὸς Δ. ἡ ἄρα AB πρὸς Δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ.]

LEMMA AD DEMONſtrationem ſequentem.

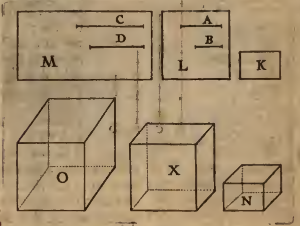
Sint quatuor termini, A, C, D, B. Dico, rationem compoſitam ex ratione contenti ab A, B, ad quadratum à C, una cum ratione B ad D, eandem eſſe quæ eſt ratio rectanguli

ΛΗ͂ΜΜΑ ΕἸΣ ΤῸ ἑξῆς.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι, οἱ Α, Γ, Δ, Β. λέγω, ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, μετὰ τοῦ τοῦ Β πρὸς Δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι

τῷ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ Α, Β ἴσος ὁ Κ· τῷ δὲ ἀπὸ Γ ἴσος ὁ Λ. καὶ γεγονέτω, ὡς ὁ Β πρὸς Δ, οὕτως ὁ Λ πρὸς Μ.

ab A,B in B, ad quadratum à C in D. Sit enim contento ab A,B æqualis terminus K; & quadrato à C æqualis L. & fiat, ut B ad D, ſic L ad M.



ὁ ἄρα τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ Κ πρὸς Λ· τουτέστι, τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ· καὶ τοῦ Λ πρὸς Μ· τουτέστι, τοῦ Β πρὸς Δ. ὁ δὴ Κ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ν ποιείτω· ὁ δὲ Λ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω· τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας, τὸν Ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β ὁ Κ ἐστὶν, ὁ δὲ Κ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ὁ ἄρα Ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ Γ ὁ Λ ἐστὶν, ὁ δὲ Λ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκεν· ὁ Ο ἄρα ἐστὶν

Quare ipſius K ad M ratio compoſita eſt ex ratione K ad L; hoc eſt, contenti ab A, B ad quadratum à C; & ratione L ad M; hoc eſt, B ad D. Porro K ipſum B multiplicans faciat N; & L ipſum B multiplicans faciat X; & ipſum D multiplicans, O. Quoniam igitur contentum ab A,B eſt terminus K; at K ipſum B multiplicans fecit N: Ergo N eſt qui continetur ab A, B in B. Rurſus quia quadratus à C eſt L, at L ipſum D multiplicans fecit O; ergo O eſt quadratus

à C in D. Quare ratio contenti ab A, B in B, ad quadratum à C in D, eadem eſt quæ ratio ipſius N ad O. Monſtrare igitur oportet, ipſius K ad M rationem eandem eſſe quæ ipſius N ad O. Quoniam igitur uterque ipſorum K, L, ipſum B multiplicans, utrumque ipſorum N, X fecit; eſt igitur, ut K ad L, ſic N ad X. Rurſus quia L utrumque ipſorum B, D multiplicans, utrumque ipſorum X, O fecit; eſt igitur, ut B ad D, ſic X ad O. Sed ut B ad L, ſic L ad M. ergo etiam ut L ad M, ſic X ad O. Ergo termini K, L, M cum terminis N, X, O in eadem ratione ſunt, bini ac bini ſumti. Ergo & ex æquali eſt, ut K ad M, ſic N ad O. Et ratio ipſius K ad M eadem eſt illi, quæ compoſita eſt ex ratione contenti ab A, B, ad quadratum à C; & ratione quam habet B ad D. At ratio ipſius N ad O eadem eſt quæ contenti ab A, B in B, ad quadratum à C in D. Ergo compoſita ratio ex ratione contenti ab A, B ad quadratum à C, & ex ea, quam habet B ad D, eadem eſt quæ contenti ab A, B in B ad quadratum à C in D.

Evidens quoque hoc, contentum ab A, B in B, æquale

ὁ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸν Δ. ὥς τε ὁ τοῦ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Ν πρὸς Ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Ν πρὸς Ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν Κ, Λ, τὸν Β πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ν πρὸς Ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ Λ ἑκάτερον τῶν Β, Δ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν Ξ, Ο πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Β πρὸς Δ, ὁ Ξ πρὸς Ο. ἀλλ' ὡς ὁ Β πρὸς Δ, ὁ Λ πρὸς Μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Λ πρὸς Μ, ὁ Ξ πρὸς Ο. οἱ ἄρα Κ, Λ, Μ τοῖς Ν, Ξ, Ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, συνδύο λαμβανόμενοι. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ Κ πρὸς Μ, οὕτως ὁ Ν πρὸς Ο. καὶ ὁ τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Β πρὸς Δ. ὁ δὲ τοῦ Ν πρὸς Ο λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Β πρὸς Δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ.

Φανερὸν δὲ καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ

τοῦ Β ἐπὶ τὸν Α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β, τοῦ Β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένου. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸν Α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ τοῦ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησι, ὅτι ὁ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον· καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα· δηλαδὴ

eſſe quadrato à B in A. Quia enim eſt, ut A ad B, ſic contentum ab A, B ad quadratum à B, ipſo B communi altitudine ſumto. Jam verò, ſi quatuor termini proportionales ſint, contentum ab extremis æquale eſt contento à mediis: Eſt ergo contentum ab A, B in B æquale quadrato à B in A.

IN ALTERAM DEMONſtrationem propoſitionis VIII.

Dictum eſt in præcedentibus, ſi inter duas magnitudines media ſumatur, extremarum rationem compoſitam eſſe ex ea quam habet prima ad mediam, & media ad tertiam. Similiter quoque ſi plures mediæ ſumantur, extremarum rationem compoſitam eſſe ex rationibus, quas habent omnes ordine ad ſe invicem magnitudines. Quare & hîc dicit, ſegmenti BAD ad ſegmentum BCD rationem compoſitam eſſe & ex ea, quam habet ſegmentum BAD ad conum, cujus baſis quidem eſt circulus circa diametrum BD, vertex autem punctum A; & idem conus ad conum, qui baſin quidem eandem habet, verticem verò punctum C; & dictus conus ad ſegmentum BCD. nempe inter ſegmentum

DAB, & BCD, mediis ſumtis dictis conis. Porro ſegmenti BAD ad conum BAD ratio eadem eſt quæ rectæ GH ad HC, ob poriſma ſecundi theorematis libri ſecundi. Dicebatur enim ſegmentum ad conum in ipſo, hanc habere rationem, quam habet utraque ſimul, nempe recta ex centro ſphæræ, & altitudo reliqui ſegmenti, ad altitudinem reliqui ſegmenti. Cæterum coni BAD ad conum BCD ratio eadem eſt quæ rectæ AH ad HC. quippe ſupra eadem baſi exiſtentes, inter ſe ſunt ut altitudines. Deinde coni BCD ad ſegmentum BCD ratio ea eſt quæ rectæ AH ad HF, propter revertendo dicti poriſmatis. adeo ut ſegmenti BAD ad ſegmentum BCD ratio compoſita ſit & ex ratione rectæ GH ad HC, & AH ad HC, & AH ad HF. Ratio autem compoſita ex ratione rectæ GH ad HC, unà cum ratione ipſius AH ad HC, eſt ratio rectanguli à GHA ad quadratum ab HC. Æquangula enim parallelogrammata rationem habent compoſitam ex lateribus. Porro ratio rectanguli à GHA ad quadratum ab HC, unà cum ratione ipſius AH ad HF, eſt ratio rectanguli à GHA in HA, ad quadra-

τοῦ ΔΑΒ τμήματος, καὶ τοῦ ΒΓΔ, μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κώνων. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸν ΒΑΔ κῶνον, ὁ τῆς ΗΘ ἐστὶ πρὸς ΘΓ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ κῶνον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥτε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ ΒΑΔ κώνου πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, ὁ τῆς ΑΘ ἐστὶ πρὸς ΘΓ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ ΒΓΔ κώνου πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα, ὁ τῆς ΑΘ ἐστὶ πρὸς ΘΖ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος. ὥς τε ὁ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ, μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ, ὁ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλογράμματα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ, ὁ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘΑ, πρὸς

τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ· τουτέστι, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΓ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ. ἀλλὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ὅτι

tum à CH in HF, ut monſtratum eſt in præcedente lemmate. Terminus autem rectanguli à GHA in HA, idem eſt qui quadrati ab AH in HG. nam & hoc quoque in præmiſſo lemmate eſt demonſtratum. Ergo ſegmenti ad ſegmentum ratio eadem eſt quæ quadrati ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF. Quia igitur monſtrare oportet, ſegmentum ad ſegmentum, minorem rationem habere quàm duplam rationis ſuperficiei ad ſuperficiem; monſtrare igitur oportet, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem quàm duplam rationem habere ejus, quam habet ſuperficies ſegmenti BAD ad ſuperficiem ſegmenti BCD; hoc eſt, ejus quam habet quadratum ab AB ad quadratum à BC. Sed ut quadratum ab AB ad quadratum à BC, ſic AH ad HC. Hoc enim monſtratum eſt in præcedentibus theorematis. Monſtrare igitur oportet, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem habere rationem quàm duplam rationis rectæ AH ad HC. Sed rationis rectæ AH ad HC dupla eſt ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HC. Monſtrandum

igitur eſt, quadratum ab A H in HG ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habere quàm quadratum ab AH ad quadratum ab H C. Sed ut quadratum ab AH ad quadratum ab HC, ipsâ HG communi altitudine ſumtâ, ſic quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HG. Monſtrandum igitur eſt, quadratum ab A H in H G, ad quadratum à CH in H F, minorem rationem habere quàm idem quadratum ab A H in H G, ad quadratum à C H in HG. Ad quam autem magnitudinem eadem minorem rationem habet, illa major eſt. Monſtrare igitur oportet, quadratum à C H in H F, majus eſſe quadrato à C H in H G; hoc eſt, majorem eſſe FH quàm H G. Eſt vero hoc manifeſtum. Inæqualibus enim, ipſis A H, H C, æquales adpoſitæ ſunt, rectæ FA, CG.

Cum hæc dixiſſet, ipſe quidem compoſitionem non ſubjunxit; nos autem illam adponemus. Quoniam FH major eſt quàm H G, quadratum à CH in HF majus eſt quadrato à CH in HG. Itaque quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm idem qua-

ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, τῆς ΘΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ αὐτὸ, τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. τουτέστιν, ὅτι μείζων ἡ ΖΘ τῆς ΘΗ. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν. ἀνίσοις γὰρ ταῖς ΑΘ, ΘΓ, ἴσαι πρόσκεινται αἱ ΖΑ, ΓΗ.

Ταῦτα εἰπὼν, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν. ἡμεῖς δ᾽ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ΖΘ τῆς ΘΗ μείζων ἐστὶ, τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὥστε τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ

αὐτὸ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν, ὃν ἔχει ἡ ΑΘ πρὸς ΘΓ. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος, ἐπάγει.

Φημὶ δή, ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν

dratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HG. Sed ut quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HG, ſic quadratum ab AH ad quadratum à CH. Quare quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm quadratum ab AH ad quadratum ab HC. Sed ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HC dupla eſt rationis rectæ AH ad HC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet recta AH ad HC. Jam verò ſegmentorum rationem eandem monſtravimus, quam habet quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF: at ſuperficierum rationem, quam habet recta AH ad HC. Ergo ſegmentum ad ſegmentum minorem rationem habet quàm duplam rationis ſuperficiei ad ſuperficiem. Deinde reſolvens alteram partem theorematis, ſubjungit.

Dico quoque, majus ſegmentum ad minus, majorem rationem habere quàm ſeſquialteram rationis ſuperficiei ad ſuperficiem. At ſegmentorum quidem rationem monſtravimus eandem eſſe, quam

habet quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF; rationis autem ſuperficiei ad ſuperficiem ſeſquialtera eſt ratio cubi ab AB ad cubum à BC.] Rationis quippe rectæ AB ad BC dupla quidem eſt ratio quadrati ab AB ad quadratum à BC; tripla autem, ratio cubi à recta AB ad cubum à BC. Sed ut cubus ab AB ad cubum à BC, ſic cubus ab AH ad cubum ab HB. Ut enim AB ad BC, ſic AH ad HB, ob triangulorum ABC, ABH ſimilitudinem. Jam vero ſi quatuor rectæ proportionales ſint, etiam ſolida ab ipſis, ſimilia & ſimiliter deformata, ſunt proportionalia. Quare cubus ab AH ad cubum ab HB, ſeſquialteram rationem habet ejus, quam habet quadratum ab AB ad quadratum à BC; hoc eſt, ſuperficies ad ſuperficiem. Sed ut ſegmentum ad ſegmentum, ſic quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF. Dico igitur, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habere quàm cubus ab AH ad cubum ab HB; hoc eſt, qua-

ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ· τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον.] Τοῦ γὰρ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ τετράγωνον· τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον. ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον. ὡς γὰρ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓ, ΑΒΘ, τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεά, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν. ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ τετράγωνον· τουτέστιν, ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. φημὶ οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον· τουτέστιν, τὸ ἀπὸ

ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, διπλασίων τοῦ τῆς Α Θ πρὸς Θ Β, προσλαβὼν τὸν τῆς Α Θ πρὸς ΘΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς Α Θ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ Θ Β κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ, προσλαβὼν τὸν τῆς Αϑ πρὸς ϑΒ, ὁ τοῦ ἀπὸ Α ϑ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ Γ ϑ Β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς Α ϑ πρὸς ϑΒ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ϑΒ πρὸς ϑΓ· τῆς Β ϑ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης· ὁ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ, μετὰ τοῦ τῆς Αϑ πρὸς ϑΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ, μετὰ τοῦ τῆς Βϑ πρὸς ϑΓ. ἀλλ' ὁ τῆς Βϑ πρὸς ϑΓ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ Βϑ πρὸς τὸ ὑπὸ Β ϑ Γ, τῆς Β ϑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑ Β λόγος, μετὰ τοῦ τῆς Αϑ πρὸς ϑΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑ Β, μετὰ τοῦ ἀπὸ ϑ Β πρὸς τὸ ὑπὸ Β ϑ Γ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ Α ϑ πρὸς τὸ ὑπὸ Β ϑ Γ λόγος, ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ

dratum ab AH ad quadratum ab HB, & recta AH ad HB. Ratio enim quadrati ab AH ad quadratum ab HB, dupla rationis rectæ AH ad HB, adſumens rationem rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ cubi ab AH ad cubum ab HB. utraque enim ejuſdem tripla eſt. Porro ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, adſumens rationem rectæ AH ad HB, eſt ratio quadrati ab AH ad rectangulum à CHB. Quoniam enim ratio rectæ AH ad HB eadem eſt quæ rectæ HB ad HC; rectâ BH mediâ proportionaliter exiſtente; ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ quadrati ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione rectæ BH ad HC. Sed ratio rectæ BH ad HC, eadem eſt quæ quadrati à BH ad rectangulum à BHC, rectâ BH communi altitudine ſumtâ. Quare quadrati ab AH ad quadratum ab HB ratio, una cum ratione rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ quadrati ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione quadrati ab HB ad rectangulum à BHC. Sed quadrati ab AH ad rectangulum à BHC ratio, compoſita eſt ex

ratione quadrati ab AH ad quadratum à BH, & ratione quadrati à BH ad rectangulum à BHC, quadrato à BH medio ſumto. Quare quadrati ab AH ad quadratum ab HB ratio, una cum ratione rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ quadrati ab AH ad rectangulum à BHC. Ratio autem quadrati ab AH ad rectangulum à BHC, eadem eſt quæ quadrati ab AH in HG, ad rectangulum à BHC in HG, rectâ GH communi altitudine ſumtâ.

Atque hinc quoque dico, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habere quàm quadratum ab AH ad rectangulum à BHC; hoc eſt, quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à CHB in HG.] Ad quam autem magnitudinem eadem majorem rationem habet, illa minor eſt.

Monſtrandum igitur, quadratum à CH in HF minus eſſe rectangulo à BHC in HG. quod idem eſt ac monſtrare, quadratum à CH ad rectangulum à CHB minorem rationem habere quàm recta GH ad HF.] Si enim ſint quatuor termini, ut hîc, quadratum à CH, & rectangulum à CHB, & rectæ HG, HF; ſitque con-

ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ, καὶ τȣ̃ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, τȣ̃ ἀπὸ ΒΘ μέσȣ λαμβανομένȣ. ὥς τε ὁ τȣ̃ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ λόγος, μετὰ τȣ̃ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, ὁ αὐτός ἐςι τῷ τȣ̃ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ. ὁ δὲ τȣ̃ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ λόγος, ὁ αὐτός ἐςι τῷ τȣ̃ ἀπὸ Αϑ ἐπὶ τὴν ϑΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ ἐπὶ τὴν ϑΗ, τῆς ϑΗ κοινȣ̃ ὕψȣς λαμβανομένης.

Φημὶ δὴ, ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ Αϑ ἐπὶ τὴν ϑΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ Γϑ ἐπὶ τὴν ϑΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ· τȣτέςι, τὸ ἀπὸ Αϑ ἐπὶ τὴν ϑΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΓϑΒ ἐπὶ τὴν ϑΗ.] πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσον ἐςί.

Δεικτέον ȣ̂ν, ὅτι τὸ ἀπὸ Γϑ ἐπὶ τὴν ϑΖ ἔλασσόν ἐςι τȣ̃ ὑπὸ ΒϑΓ ἐπὶ τὴν ϑΗ. ὃ ταυτόν ἐςι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ Γϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓϑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ηϑ πρὸς ϑΖ.] Ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι, ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ Γϑ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓϑΒ, καὶ ἡ ϑΗ, καὶ ϑΖ. καὶ τὸ

ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ἢ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἐχρῆν δεῖξαι, τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ταυτόν ἐστιν τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ, ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ.

Δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ· τουτέστιν, ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ. καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΒΛ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΘΑ, ΚΕ. ἡ γὰρ ΑΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφότερον τὴν ΘΑ, ΚΕ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ΗΘ τῆς ΘΓ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΕ

tentum ab extremis minus contento à mediis; primus ad ſecundum minorem rationem habet quàm tertius ad quartum, ut monſtratum eſt ſuperius. Merito igitur monſtrare oportebat, quadratum à CH in HF minus eſſe rectangulo à CHB in HG: quod idem eſt ac monſtrare, quadratum à CH ad rectangulum à CHB, minorem rationem habere quàm recta GH ad HF. Sed ut quadratum à CH ad rectangulum à CHB, ſic recta CH ad HB.

Monſtrandum igitur eſt, rectam CH ad HB minorem rationem habere, quàm recta GH ad HF; hoc eſt, rectam GH ad HF majorem rationem habere quàm recta CH ad HB. Ducatur à puncto E, ipſi EC ad angulos rectos recta EK. & à puncto B perpendicularis ſupra ipſam, recta BL. Monſtrandum nobis reſtat, rectam GH ad HF majorem rationem habere quàm recta CH ad HB. Æqualis autem eſt recta HF ambabus HA, KE. quippe AF radio æqualis eſt. Monſtrandum igitur eſt, rectam GH ad ambas HA, KE majorem rationem habere quàm CH ad HB. Quare etiam, ablatâ CH ab HG, & LE, quæ

æqualis eſt ipſi B H, ab E K, monſtrandum erit, reliquam C G ad reliquas ambas, A H, K L, majorem rationem habere quàm C H ad H B.] Quoniam enim monſtrandum eſt, rectam G H ad ambas, H A, KE, majorem rationem habere quàm C H ad H B. & permutando, rectam G H ad H C majorem rationem habere quàm ambæ H A, KE, ad HB, hoc eſt, ad L E. & dividenti, rectam G C ad C H majorem rationem habere quàm ambæ H A, K L, ad L E, hoc eſt, ad B H. permutando, rectam G C ad ambas, H A, K L, majorem rationem habere quàm CH ad HB. Sed ut recta CH ad HB, ſic recta HB ad HA; hoc eſt, recta LE ad AH. Monſtrandum ergo eſt, rectam G C ad ambas H A, K L, majorem rationem habere quàm recta LE ad A H. & permutando, rectam CG, hoc eſt, KE ad EL majorem rationem habere quàm ambæ, KL, H A ad HA. dividenti, rectam K L ad L E majorem rationem habere quàm ipſa K L ad H A; hoc eſt, rectam LE minorem eſſe quàm H A.

Deinceps nos compoſitionem adponemus. Quoniam L E minor eſt quàm A H, igi-

τῆς Ε Λ, ἴσης τῇ Β Θ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ Γ Η πρὸς λοιπὴν συναμφότερον, τὴν Α Θ, Κ Λ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β.] Ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ Η Θ πρὸς συναμφότερον, τὴν Θ Α, ΚΕ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ Η Θ πρὸς Θ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος, ἡ Θ Α, Κ Ε πρὸς Θ Β, τουτέστι, πρὸς Λ Ε. καὶ διελόντι, ἡ Η Γ πρὸς Γ Θ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος, ἡ Θ Α, Κ Λ, πρὸς Λ Ε, τουτέστι, πρὸς Β Θ. ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ Η Γ πρὸς συναμφότερον, τὴν Θ Α, Κ Λ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β, οὕτως ἡ Θ Β πρὸς Θ Α· τουτέστιν, ἡ Λ Ε πρὸς Α Θ. ὅτι ἄρα ἡ Η Γ πρὸς συναμφότερον, τὴν Θ Α, Κ Λ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Λ Ε πρὸς Α Θ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ Γ Η, τουτέστιν, ἡ Κ Ε πρὸς Ε Λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος, ἡ Κ Λ, Θ Α, πρὸς Θ Α. διελόντι, ἡ Κ Λ πρὸς Λ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ αὐτὴ ἡ Κ Λ πρὸς Θ Α· τουτέστιν, ὅτι ἐλάσσων ἡ Λ Ε τῆς Θ Α ἐστίν.

Ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ Λ Ε τῆς Α Θ ἐλάσσων, ἡ ἄρα

ΚΛ πρὸς ΛΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΛ πρὸς ΑΘ. συνθέντι ἡ ΚΕ πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΑΘ, πρὸς ΑΘ. ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΒΘ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ΗΓ πρὸς ΒΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΑΘ, πρὸς ΑΘ. ἐναλλὰξ, ἡ ἄρα ΗΓ πρὸς συναμφότερον τὴν ΚΛ, ΑΘ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΑ, τουτέστιν, ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἐναλλὰξ ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος, ἡ ΚΛ, ΑΘ, πρὸς ΘΒ. συνθέντι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΑΘ, μετὰ τῆς ΘΒ, τουτέστι, συναμφότερος, ἡ ΑΘ, ΚΕ, πρὸς ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΚΕ τῇ ΑΖ. ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ. ἐναλλὰξ, ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ: μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ὡς δὲ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. καὶ διὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ

tur KL ad LE majorem rationem habet quàm KL ad AH. componenti KE ad EL majorē rationem habet quàm ambæ KL, AH, ad AH. recta autem LE æqualis eſt ipſi BH. Quare recta GC ad BH majorem rationem habet quàm ambæ KL, AH, ad AH. permutando ergo GC ad ambas KL, AH, majorem rationem habet quàm recta BH ad HA, hoc eſt, recta CH ad HB. permutando recta GC ad CH majorem rationē habet quàm ambæ KL, AH, ad HB. componenti recta GH ad HC majorem rationem habet quàm ambæ, KL, AH, una cum recta HB, hoc eſt, ambæ AH, KE, ad BH. æqualis autem eſt recta KE ipſi AF. Ergo recta GH ad HC majorem rationem habet quàm FH ad HB. permutando, recta GH ad HF majorem rationē habet quàm recta CH ad HB. ut autem recta CH ad HB, ſic quadratum à CH ad rectangulum à CHB. Ergo recta GH ad HF majorem rationem habet quàm quadratum à CH ad rectangulum à CHB. & ob prius dicta, quadratum à CH in HF minus eſt rectangulo à CHB in HG. Ergo quadratum ab AH in HG, ad qua-

dratum à CH in HF majorem rationem habet quàm quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à CHB in HG; hoc eſt, quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à CHB in HF majorem rationẽ habet quàm quadratum ab AH ad rectangulum à BHC. Ratio autem quadrati ab AH ad rectangulum à BHC, quadrato à BH medio ſumto, compoſita eſt & ex ratione quam habet quadratum ab AH ad quadratum ab HB, & quam habet quadratum à BH ad rectangulum à BHC. Sed ratio quadrati à BH ad rectangulum à BHC eadem eſt quæ rectæ BH ad HC; hoc eſt, rectæ AH ad BH. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habet quàm quadratum ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione rectæ AH ad HB. Ratio autem compoſita & ex ratione quadrati ab AH ad quadratum ab HB, & rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ cubi ab AH ad cubum ab HB; hoc eſt, cubi ab AB ad cubum à BC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habet, quàm cubus ab AB ad cubum à BC. Sed ratio quadrati

ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ· τουτέστι, τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, τοῦ ἀπὸ ΒΘ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΒΘ πρὸς ΘΓ· τουτέστι, τῷ τῆς ΑΘ πρὸς ΒΘ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον· τουτέστι, τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ

ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον λόγος, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ab A H in HG, ad quadratum à C H in H F, eadem monſtrata eſt quæ ſegmentorum ratio. at ratio cubi ab AB ad cubum à B C, ſeſquialtera monſtrata eſt rationis ſuperficierum. Ergo ſegmentum ad ſegmentum majorem rationem habet quàm ſeſquialteram ejus quam habet ſuperficies ad ſuperficiem.

SEQUITUR TABULA RATIONIS SUPERoctageſimæ, (quam commatis rationem recentiores faciunt,) centiesduodecies ſibi ſuperadditæ: quâ, tanquam communi menſurâ, cæterarum rationum magnitudinem deinceps explorabimus.

1.	81 80	13.	6461081889 5497558138	25.	5153775207 3777893186	37.	4110983167 2596148429
2.	6561 6400	14.	5233476330 4398046511	26.	4174557917 3022314549	38.	3329896365 2076918743
3.	531441 512000	15.	4239115827 3518437208	27.	3381391913 2417851639	39.	2697216055 1661534994
4.	43046721 40960000	16.	3433683820 2814749767	28.	2738927449 1934281311	40.	2184745005 1329227995
5.	3486784401 3276800000	17.	2781283894 2251799813	29.	2218531234 1547425049	41.	1769643454 1063382396
6.	2824295364 2621440000	18.	2252839954 1801439850	30.	1797010299 1237940039	42.	1433411197 850705917
7.	2287679245 2097152000	19.	1824800363 1441151880	31.	1455578342 990352031	43.	1161063070 680564733
8.	1853020188 1677721600	20.	1478088294 1152921504	32.	1179018457 792281625	44.	9404610869 5444517870
9.	1500946352 1342177280	21.	1197251518 922337203	33.	9550049507 6338253001	45.	7617734804 4355614296
10.	1215766545 1073741824	22.	9697737297 7378697629	34.	7735540101 5070602400	46.	6170365191 3484491436
11.	9847709021 8589934592	23.	7855167211 5920958103	35.	6265787482 4056481920	47.	4997995805 2787593149
12.	7976644307 6871947673	24.	6362685441 4722366482	36.	5075287860 3245185536	48.	4048376602 2230074519

49.	3479185047 1784059615	72.	2575854686 1053111916	95.	2023376927 621634045	9/4.	65.	66.
50.	2656139888 1427447692	73.	2086442296 841498333	96.	1638935311 497323236	27/8.	97.	98.
51.	2151473309 1141798153	74.	1690018259 673998666	97.	1327537602 397858589	4/3.	23.	24.
52.	1742693381 913438523	75.	1368914790 539198933	98.	1075305457 318286871	16/9.	46.	47.
53.	1411581638 730750818	76.	1108820988 431359146	99.	8709974208 2546294970	64/27.	69.	70.
54.	1143381127 584600654	77.	8981449941 3450873173	100.	7055079108 2037035976	256/81.	92.	93.
55.	9261387130 4676805238	78.	7274974452 2760698538	101.	5714614078 1629628781	5/4.	17.	18.
56.	7501723576 3741444190	79.	5892729306 2208556830	102.	4628837403 1303703024	25/16.	35.	36.
57.	6076396096 2993155352	80.	4773110738 1766847064	103.	3749358296 1042962419	6/5.	14.	15.
58.	4921880838 2394524281	81.	3866219697 1413477651	104.	3036980220 834369935	36/25.	29.	30.
59.	3986723479 1915619425	82.	3131637955 1130782121	105.	2459953978 667495948	9/8.	9.	10.
60.	3229246017 1532495540	83.	2536616743 904625697	106.	1992362722 533996758	81/64.	18.	19.
61.	2615689274 1225996432	84.	2054667662 723700557	107.	1613975865 427197407	729/512.	28.	29.
62.	2118708312 980797146	85.	1664280806 578960446	108.	1307320402 341757925	6561/4096.	37.	38.
63.	2716153733 784637716	86.	1348067453 463168356	109.	1058929325 273406340	59049/32768.	47.	48.
64.	1390084523 627710173	87.	1091934637 370534685	110.	8577329159 2187250784	531441/262144.	56.	57.
65.	1125968464 502168138	88.	8844670561 2964277484	111.	6947636618 1749800579	10/9.	8.	9.
66.	9126344560 4017345110	89.	7164183154 2371421987	112.	5627585661 1399840463	100/81.	16.	17.
67.	7387479093 3213876088	90.	5802988355 1897137590	*Ratio*	*major est cōmatis* / *minor cōmatis*	16/15.	5.	6.
68.	5983858066 2571100870	91.	4700420567 1517710072	2/1.	55. 56.	25/24.	3.	4.
69.	4846925033 2056880696	92.	3807340659 1214168057	3/1.	88. 89.	128/125.	1.	2.
70.	3926009177 1645504557	93.	3083945934 971334446	4/2.	111. 112.	256/243.	4.	5.
71.	3180067514 1316403645	94.	2497996106 777067556	3/2.	32. 33.	65536/59049.	8.	9.

OMnia hæc veterum auctorum loca adducenda ante cenſuit Euthymius, quàm ad ipſam rationum compoſitionem veniret. Quamvis etiam ad alia, vel probanda, vel refellenda, quædam pertineant, quæ unum in locum congerere ſatius fore judicatum eſt, quàm ut hîc illîc infarcirentur. Cæterum rationum compoſitioni illa præmittam, inquit, quæ ad explorandam earum quantitatem pertinent, adeoque earum inter ſe differentiam cognoſcendam; quo nempe exceſſu major ratio ſuperet minorem; vel contrà, quanto defectu minor à majore deficiat. Quod fit reductione propoſitarum rationum ad communes terminos, vel antecedentes, vel conſequentes; ut in Arithmeticis minutiis, vulgò ad eosdem terminos conſequentes, ſeu denominatores. Sint enim duæ minutiæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$, quas conjungere velim, aut quarum differentiam, minore à majori ablatâ, cognoſcere expetam. Hoc fieri nequit, additis binis ſuperioribus terminis, 3 & 2, quos numeratores vocant; & binis inferioribus, 4 & 3, quos adpellant denominatores, ut fiat compoſita minutia $\frac{5}{7}$, æqualis binis, $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$. quandoquidem in diverſas partes harum binarum minutiarum integra, ſeu unitates ſunt diviſæ. quod exemplo in materia fundato clarius evadet. Thalerum imperialem quem vocant, non integrum habeo, ſed tres tantùm illius partes quartas, ſeu tres quadrantes; id eſt, thaleri imperialis in quatuor æquales partes diviſi; puta ortas thaleri, quas Germani vocant, quarum ſingulæ 12 ſolidos Lubecenſes valent; non habeo omnes quatuor partes, ſeu ortas; ita quippe integrum thalerum impe-

rialem haberem; ſed tres tantùm illius habeo partes; id eſt, ter duodena, ſeu, minutæ pecuniæ, 36 ſolidos Lubecenſes. Rurſus, thaleri imperialis habeo duas partes tertias; ſeu, thaleri imperialis in tres trientes; quorum ſinguli valent marcam Lubecenſem, ſeu 16 Lubecenſes ſolidos; diviſi habeo duos tantùm trientes, id eſt, duas marcas Lubecenſes, ſeu, minutæ pecuniæ 32 ſolidos. Duarum harum minutiarum; nempe, trium ortarum thaleri, & duarum marcarum Lubecenſium; additarum ſummam, in minutiore moneta, ſcire deſidero. Ad eaſdem itaque partes, ſeu nummos, ut in hoc exemplo dicam, utriſque partibus, quartæ & tertiæ numerandis communes, binæ illæ minutiæ ſunt reducendæ. quod fit, multiplicatis inter ſe denominatoribus, 4 & 3. ut exurgant 12. ut nempe cogitem, utrumque thalerum imperialem, quorum $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$ habeo, in duodenas partes fuiſſe tributum, quarum ſingulæ 4 ſolidos Lubecenſes valent. Prioris igitur minutiæ $\frac{3}{4}$, denominatorem 4, per alterius minutiæ $\frac{2}{3}$ denominatorem, nempe 3, multiplicavi; per eundem igitur denominatorem 3, etiam prioris minutiæ $\frac{3}{4}$ numeratorem, nempe 3, multiplicare debeo, ut fiant 9. Itaque per eundem numerum 3, utrumque terminum minutiæ $\frac{3}{4}$ multiplicavi, adeoque eſt, ut 3 ad 4, ſic 9 ad 12. Ergo pro minutia $\frac{3}{4}$ habeo aliam in majoribus numeris minutiam, $\frac{9}{12}$, ſed quæ quantitate priori plane congruat. quippe prioris minutiæ integrum ſectum erat in quatuor partes, quarum tres habebam; ſed in hac minutia $\frac{9}{12}$, ſingulæ prioris minutiæ partes ſubdiviſæ ſunt in partes tres. In poſteriore igitur hac minutia partes adeo

minutæ ſunt,ut ternæ ſingulis prioris minutiæ ſint æquales. Sic porro pro ſecunda minutia $\frac{2}{3}$, aliam æque magnam, ſed quæ denominatorem habeat 12, ſubſtituemus. Per 4, prioris minutiæ $\frac{3}{4}$ denominatorem, multiplicavi ſecundæ minutiæ denominatorem, nempe 3, & facta ſunt 12. per eundem prioris minutiæ $\frac{3}{4}$ denominatorem, nempe 4, multiplicandus quoque eſt ſecundæ minutiæ $\frac{2}{3}$ numerator, nempe 2, ut fiant 8. Itaque per eundem numerum 4, utrumque terminum minutiæ $\frac{2}{3}$ multiplicavi; adeoque eſt, ut 2 ad 3, ſic 8 ad 12. Æqualis ergo eſt minutia $\frac{8}{12}$ minutiæ $\frac{2}{3}$. quippe ſi minutiæ, vel rationis uterque terminus, per eundem numerum multiplicetur, ejusdem quantitatis minutia, vel ratio exurgit. Hoc adhuc clarius, inquit, ô Hermotime, qui rudis adeo ad hæc cognoſcenda accedis, ut præter ingenii aliquod acumen nihil adferas, tibi exponam. Duo mala me habere puta, æque magna, quæ inter tres pueros, ætate differentes, diſtribuere velim, ita ut major natu accipiat $\frac{3}{4}$ unius mali; natu medius, $\frac{2}{3}$ alterius mali; minimus capiat utriusque mali reliquias. Scindo unum malum in quatuor æquales partes, quarum tres accipit puer maximus: alterum ſcindo in tres æquas partes, quarum duas capit medius. Ergo minimus primi mali, in quatuor partes diviſi, accipit unam partem; & alterius item mali, in tres partes diviſi, partem unam. habet ergo binorum malorum, inter ſe æqualium, duas partes, quartam & tertiam. Sed quantum quisque acceperit, ob partium inæqualitatem, ignorant. Ut igitur accurate hoc videant, ſcindo maximi pueri, qui tres partes

quártas acceperat, ſingulas partes quartas, ſeu quadrantes, in tres particulas, ut pro tribus habeat novem: quales integrum malum habet duodecim. Porro ſecundi pueri, qui duas partes tertias acceperat, ſeu duos trientes, ſingulas partes ſcindo in particulas quatuor: qui propterea pro binis habebit octonas; quales integrum malum habet duodenas. adeoque ſingulæ æquales ſunt ſingulis particulis, quas primus puer ceperat. id eſt, quales novem particulas acceperat primus puer, tales octo accepit ſecundus. Similiter minimi pueri unam partem quartam in tres ſeco particulas; & unam partem tertiam, in quatuor. quæ additæ faciunt particulas 7. Porro 9 particulæ primi; 8, ſecundi; & 7, tertii, compoſitæ exhibent 24 particulas, in quot duo illa mala ſunt diviſa. Itaque plures quidem ſinguli partes accipiunt, ſed minores: nec hilum amplius habent in poſterioribus minutiis, $\frac{9}{12}$. $\frac{8}{12}$. $\frac{3}{12}$ & $\frac{4}{12}$. quàm in prioribus, $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$. Tot verbis rem non adeo obſcuram declarare, non ſine meo faſtidio, volui, ut ad hujusmodi ſubtilitates clare inſpiciendas te præpararem. Reductis igitur hoc modo ad eundem denominatorem minutiis, facilis eſt earum additio; ſcilicet additis numeratoribus, hîc 9 & 8, unde exurgunt 17; ſubſcripto communi denominatore 12. ſic, $\frac{17}{12}$. ſeu 1 $\frac{5}{12}$. & facilis quoque minoris à majore ablatio, nempe 8 à 9, unde 1 reſtat; ſubſcripto communi denominatore 12, ſic $\frac{1}{12}$. quæ pars duodecima eſt exceſſus, quo major minutia $\frac{3}{4}$ ſuperat minorem $\frac{2}{3}$. Similiter minutiæ $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$, reductæ ad eundem denominatorem, erunt $\frac{8}{6}$ & $\frac{9}{6}$, quæ compoſitæ faciunt minutiam $\frac{17}{6}$, ſeu 2 integra, & mi-

nutiam $\frac{7}{6}$. Verum ſi rationum magnitudo ſit exploranda, illa major eſt, cujus termini longius inter ſe diſtant; quomodo ratio $\frac{9}{6}$ major eſt ratione $\frac{8}{6}$; quia inter 9 & 6 majus ſpatium eſt, nempe ternarii; quàm inter 8 & 6, nimirum binarii. Differentia autem illarum eſt ratio $\frac{9}{8}$, quæ in utriusq; rationis antecedentibus ſpectatur. Quod perinde fit, ſi earundem rationum $\frac{4}{3}$. $\frac{3}{2}$ communes facias antecedentes, ut $\frac{12}{9}$. $\frac{12}{8}$. ubi ratio $\frac{12}{8}$ rurſus major eſt, quod ejus termini, 12 & 8, longius inter ſe abſint, nimirum quaternario; quàm alterius rationis termini 12 & 9, nempe ternario; quæ propterea minor eſt. differentia autem iterum eſt ratio $\frac{9}{8}$. Eodem modo, rationes $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{2}$, ad eosdem conſequentes terminos reductæ, ſunt $\frac{4}{2}$. $\frac{3}{2}$. major quidem $\frac{4}{2}$, quia 4 longius abeſt à 2 quàm ab eodem 2 abeſt 3. eſtque exceſſus, quo major $\frac{4}{2}$ minorem $\frac{3}{2}$ ſuperat, ratio $\frac{4}{3}$. Nec aliter, ſi easdem rationes $\frac{2}{1}$. $\frac{3}{2}$. ad communes antecedentes reducas, $\frac{6}{3}$. $\frac{6}{4}$. major eſt $\frac{6}{3}$. minor $\frac{6}{4}$. exceſsiva autem ratio, ut ante, $\frac{4}{3}$. Alia exempla ſunt, rationes $\frac{9}{8}$. $\frac{10}{9}$ ad communes conſequentes reductæ, $\frac{81}{72}$. $\frac{80}{72}$, quarum differentia eſt ratio, in qua comma Juniores conſtituunt, $\frac{81}{80}$. Sic rationes $\frac{10}{9}$. $\frac{11}{10}$ reductæ ad eosdem conſequentes, ſunt $\frac{100}{90}$. $\frac{99}{90}$. differentia autem $\frac{100}{99}$. Atque hic cognoſcendæ rationum differentiæ modus idem eſt atque ille, qui vulgò adhibetur, rationem minorem à majore auferendo, quem deinde videbimus. Nunc alium tradam, quo rationum magnitudinem evidenter explorabimus. Scilicet minuta menſura adhibenda eſt, qua illas menſuremus. Hæc menſura, rationibus adplicanda, nonniſi ratio eſſe poteſt. Uti enim longitudines

menſuramus longitudinibus; ſuperficies, ſuperficiebus; corpora, corporibus; ſic rationes, rationibus. Ratio quippe rationem ſuperat, non numero, aut alia quacunque magnitudine, ſed ratione. Menſuram autem, vulgarem uſum ſecutus, adſumſi ſatis minutam, rationem $\frac{81}{80}$, quâ rationem $\frac{9}{8}$, in qua tonus major ſpectatur, ſuperare vidimus rationem $\frac{10}{9}$, in qua conſideratur tonus minor. quam exceſsivam rationem $\frac{81}{80}$, antiquo vocabulo, comma vocant. Intervalla igitur Harmonica, ſeu rationes, in quibus illa intervalla ſpectantur, & univerſim omnes rationes, ipſa menſurali ratione $\frac{81}{80}$ non minores, hac metimur. id eſt, exploramus, quoties hanc rationem $\frac{81}{80}$, ſeu comma, habeat ratio $\frac{2}{1}$ ſeu $\frac{80}{40}$. & $\frac{3}{2}$ ſeu $\frac{60}{40}$. & $\frac{9}{8}$ ſeu $\frac{81}{72}$. & $\frac{10}{9}$ ſeu $\frac{80}{72}$. & innumeræ aliæ. Unde perſpicuum eſt, minutam hanc menſuram, ſeu rationem $\frac{81}{80}$ aliquoties eſſe componendam, ſive addendam ſibi, ut compoſita ad propoſitæ rationis magnitudinem pertingat. Uti pannum decem ulnas longum menſuraturi, decies ulnam componimus, ut panni longitudinem adæquet. Hoc improbo labore in præcedenti tabula confecimus, ut centiesduodecies eadem menſura $\frac{81}{80}$ ſibi ſuperaddita, proxime, nondum tamen uno commate, ſuperaret rationem $\frac{4}{1}$, in qua dis diapaſon ſpectatur. Itaque inquiſiturus, quot commata, id eſt, quot rationes $\frac{81}{80}$, habeat ratio $\frac{9}{8}$, ſumo ex illa tabula novies compoſitum comma, his numeris $\frac{150094}{134217}$ comprehenſum; & facio, ut 150094 ad 134217, ſic 9 ad $8\frac{72}{1500}$. Sed $8\frac{72}{1500}$ minori ſpatio abeſt à 9, quàm 8 abeſt à 9. adeoque ratio $\frac{9}{8}$ major eſt ratione in numeris 9. $8\frac{72}{1500}$, id eſt, ratione $\frac{150094}{134217}$, ſeu, novem commatis, ſpectatâ. Quare novem

commata non explent rationem $\frac{9}{8}$. Rurſus igitur ex tabula ſumo commata decem, & facio, ut 121576 ad 107374, ſic 9 ad $7\frac{115}{121}$. Sed $7\frac{115}{121}$ majori ſpatio abeſt à 9, quàm 8 abeſt à 9. adeoque ratio $\frac{9}{8}$ minor eſt ratione in numeris 9. $7\frac{115}{121}$, id eſt, ratione $\frac{121576}{107374}$, ſeu, X commatis, ſpectatâ. Quare X commata ſuperant rationem $\frac{9}{8}$. Dico igitur, rationem $\frac{9}{8}$, in qua tonus major ſpectatur, minorem eſſe X commatis, majorem commatis IX. Eadem ratiocinatione invenimus rationem $\frac{2}{1}$ minorem 56, majorem 55 commatis: & ejus duplam $\frac{4}{1}$ minorem commatis 112, majorem 111. Sic reliquarum rationum magnitudinem inveſtigamus. quarum aliquas præcedenti commatum tabulæ pag. 71 ſubjecimus. His præmiſsis ad rationum compoſitionem accedimus; quam Euclides tradidit definitione V libri VI. ſed non ſine obſcuritate, quod vel commentaria in eam ſcripta docere poſsint. Cæterum Græca definitionis verba paullum variant, â diverſis relata. Elementorum Græca editio ſic habet: *Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινάς. Ratio ex rationibus compoſita dicitur, cum rationum quantitates multiplicatæ fecerint aliquas.* Bene, niſi quod in fine pro *τινὰς, aliquas* legendum cenſeo, *τινά.* Neque enim *πηλικότητας, quantitates,* facile ſupplebis; nequaquam certè *λόγους, rationes,* ut poſtea videbitur. Eutocius pag. 16. v. 32. rectè habet *τινὰ*, nempe *λόγον.* quod habet Scholiaſtes pag. 21. v. 33. quomodo etiam Commandinus in ſuo codice reperiſſe videtur, quem ſecutus eſt Clavius. Addit autem Eutocius, *ἐφ' ἑαυτὰς, in ſeipſas* multiplicatæ; minus rectè pro *ἐπ' ἀλλήλας, inter ſe.*

quomodo ipſe recte loquitur pag. 19. v. 27. Et certe hujusmodi aliquid tamen erat addendum, ut de ſenſu melius conſtaret. Scholiaſtes ille, Theo Alexandrinus, pag. 24. v. 32. prima verba explicate profert: *Ratio ex duabus rationibus, vel etiam pluribus conſtare dicitur.* ſed in fine inepta hæc eſt paraphraſis; *cum fecerint aliquam rationis quantitatem.* Simpliciter dicendum fuiſſet, *λόγον, rationem.* Porrò difficultas omnis eſt in vocabulo *πηλικότης, quantitas.* quo numerum ſignificari putant, à quo propoſita ratio denominatur. Sic duplæ rationis quantitas ipſis dicitur numerus duo, à quo illa nomen habet: triplæ rationis quantitas, ternarius. Atque hæc quantitas invenitur, diviſâ propoſitæ rationis antecedente magnitudine per conſequentem. ut rationis $\frac{3}{2}$ antecedens 3, per conſequentem 2 diviſa, exhibet ejus quantitatem $1\frac{1}{2}$. Sic rationis $\frac{4}{3}$ quantitas eſt $1\frac{1}{3}$. rationis $\frac{1}{6}$ quantitas, minutia $\frac{1}{6}$. rationis $\frac{8}{9}$; minutia $\frac{8}{9}$. Quod Eutocius & in hoc commentario docuit; & in altero, in XI propoſitionem lib. I. Conicorum Apollonii Pergæi. Et ante ipſum magni nominis Mathematicus, Nicomachus Geraſenus; & Heronas, commentario in Introductionem Arithmeticam. quæ duo ſcripta interciderunt. Deinde ita hoc explicant Scholiaſtes pag. 22. v. 2. Theo, pag 25. quorum omnium verba probe conſideranda mihi commendabat Euthymius. Sed altius aliquanto jam penetremus, inquit, quomodo hoc vocabuli *πηλικότης* antiquis Mathematicis ſit uſurpatum. Antiquiores equidem Euclide laudare nequeo, qui in binis definitionibus id uſurpavit. nempe in hac V. ſexti, & in III libri V. quâ *Ratio* dici-

tur *duarum magnitudinum ejuſdem generis*, κατὰ πηλικότητα; *ſecundum quantitatem*; vel, *in quantitate ſpectatarum, mutua quædam relatio.* Cauſam, cur hoc vocabuli Euclides addiderit, profert Scholiaſtes pag. 10. v. 22. *ut rationem ſepararet ab infinitis magnitudinibus. Quantitas enim terminus eſt continui quoti; & quotitas diſcreti. quippe diſcretum quotum non eſt magnitudo, ſed multitudo.* Quod quale ſit ſcholium, forſan non omnes æque vident. Itaque ex Nicomachi Arithmeticæ libro I. plenius id explicabimus, additis codicis noſtri MS. ſcholiis interlinearibus.

Τῶν τοίνυν ὄντων, τῶν τε κυρίως, καὶ τῶν καθ' ὁμωνυμίαν, ὅπερ ἐςὶ, νοητῶν τε καὶ αἰσθητῶν, τὰ μὲν ἔςιν ἡνωμένα καὶ ἀλληλοχούμενα· οἷον, ζῶον· δένδρον· κόσμος· καὶ τὰ ὅμοια. ἅπερ κυρίως (Editus codex addit, καὶ ἰδίως) καλεῖται μεγέθη. τὰ δὲ διῃρημένα τὲ καὶ ἐν παραθέσει (πλησίον κείμενα·) καὶ οἷον, κατὰ σωρείαν· ἃ καλεῖται πλήθη· οἷον, ποίμνη· δῆμος· χορὸς· σωρὸς· καὶ τὰ παραπλήσια. τῶν ἄρα δύο εἰδῶν τούτων, (τοῦ συνεχοῦς καὶ τοῦ διωρισμένου) ἐπιςήμην νοητέον (Editus, νομιςέον). τὴν σοφίαν. ἀλλ' ἐπειδὴ (Editus, ἐπεὶ) πᾶν πλῆθος, καὶ πᾶν μέγεθος, ἄπειρα τῇ ἑαυτῶν (Editus, αὐτῶν) φύσει ἐξ ἀνάγκης ἐςί· τὸ μὲν γὰρ πλῆθος, (τὸ διωρισμένον) ἀπὸ ὡρισμένης ῥίζης (τῆς μονάδος) ἀρξάμενον, οὐ παύεται προκόπτον· τὸ δὲ μέ-

Omnium quæ exiſtunt, tum propriè, tum ſecundum homonymiam; quod eſt, intelligibilium & ſenſibilium, alia ſunt unita & cohærentia; ut, animal, arbor, mundus, & ſimilia: quæ proprie *(& ſpeciatim)* vocantur magnitudines: alia ſunt diſterminata, & in adpoſitione *(prope ſe invicem poſita)* ſpectantur, & quaſi in cumulo, quæ vocantur multitudines; ut, grex, populus, chorus, acervus, & adſimilia. Sapientia igitur harum duarum ſpecierum *(continuæ magnitudinis & diſcretæ)* ſcientia eſt cenſenda. Sed quoniam omnis multitudo, omniſque magnitudo, ſuâ naturâ neceſſario ſunt infinita: ſiquidem multitudo *(diſcreta magnitudo)* à terminata radice *(unitate)* incipiens non deſinit progredi; & magnitudo, à ter-

minato integro (*ſeu, quanto*) diviſa, nullibi (*in infinitum enim dividitur*) ſectionem ſiſtere poteſt, ſed in infinitum (*potentiâ*) per hanc ſectionem progreditur: jam verò ſcientiæ omnino finitorum ſunt ſcientiæ, non infinitorum. Ideo adparet, nec circa ſimpliciter magnitudinem, nec circa multitudinem ſimpliciter conſiſtere poſſe ſcientiam. Indefinitum enim utrumque per ſe eſt: multitudo quidem, progrediens ad majus; magnitudo autem, ad minus. Sed circa aliquid ab utriſque ſeparatum: (*finitum, terminatum,*) à multitudine quidem, circa quotum; (*magnitudinem diſcretam, ſeu, numerum,*) à magnitudine, circa quantum. (*ſeu, continuam.*)

γεθος, ἀπὸ ὡρισμένης ὁλότητος (ἤγουν, τοῦ πηλίκου) διαιρούμενον, οὐδαμῆ (ἐπ' ἄπειρον γὰρ διαιρεῖται) δύναται παύειν τὴν τομήν· ἀλλ' ἐπ' ἄπειρον (τῇ δυνάμει) διὰ ταύτης (δι' αὐτῆς. Editus malè, διὰ ταῦτα) χωρεῖ. αἱ δ' ἐπιστῆμαι πάντως πεπερασμένων εἰσὶν ἐπιστῆμαι· ἀπείρων δὲ, οὐδέποτε. Φαίνεται δὴ, ὅτι οὐ (Editus, οὔτε) περὶ ἁπλῶς μέγεθος, οὔτε περὶ ἁπλῶς πλῆθος, συσταίη ἄν ποτε ἐπιστήμη. ἀόριστον γὰρ ἑκάτερον (Editus malè addit, καὶ) καθ' ἑαυτό ἐστι. πλῆθος μὲν, ἐπὶ τὸ πλέον· (Editus, πλεῖον) μέγεθος δὲ, ἐπὶ τὸ ἔλαττον. ἀλλὰ περί τι ἀπ' ἀμφοῖν ἀφωρισμένον. (ὡρισμένον, περατώμενον) ἀπὸ μὲν πλήθους, περὶ τὸ ποσόν· (τὸ διωρισμένον, ἤγουν, τὸν ἀριθμόν.) ἀπὸ δὲ μεγέθους, περὶ τὸ πηλίκον. (ἤγουν, τὸ συνεχές.)

Boëthius vertendo hæc ita ſuo modo collegit, vel potius disjecit, libro I. Arithmeticæ: *Horum igitur, id eſt, quæ ſunt propriè, quæque ſuo nomine eſſentiæ nominantur, ſcientiam ſapientia profitetur. Eſſentiæ autem geminæ partes ſunt. Una continua, & ſuis partibus juncta, nec ullis finibus diſtributa; ut eſt arbor, lapis, & omnia mundi hujus corpora, quæ propriè magnitudines appellantur. Alia verò disjuncta à ſe, & determinata* (ſcribendum, *diſterminata*, ut habeo in vetuſto codice membranaceo) *partibus, & quaſi acervatim in unum redacta concilium; ut grex, populus, chorus, acervus, &*

quicquid eorum (membranæ, *quicquid eſt.*) *quorùm partes propriis extremitatibus terminantur, & ab alterius fine diſcreta ſunt. His proprium nomen eſt multitudo.* Poſtea: *Illud quoque addendũ arbitror, quod cuncta vis multitudinis ab uno progreſſa termino, ad infinita progreſſionis argumenta* (optimè membranæ, *augmenta*) *concreſcit. Magnitudo verò, à finita inchoans quantitate, modum in diviſione non recipit. Infinitiſſimas enim ſui corporis ſuſcipit ſectiones. Hanc igitur natura infinitatem, indeterminatamque potentiam, Philoſophia ſponte repudiat. Nihil enim quod infinitum eſt, vel ſcientia poteſt colligi, vel mente comprehendi. Sed hinc ſumſit ſibi ipſa ratio, in quibus poſſet indagatricem veritatis exercere ſolertiam. Delegit enim de infinita multitudinis pluralitate, finita terminum quantitatis; & interminabilis magnitudinis ſectione rejectâ, definita ſibi ad cognitionem ſpatia depopoſcit.*

His, per ſe claris, adjungere poſſem Aſclepium, inſignem commentatorem in hanc Nicomachi Arithmeticam, quem M S. habeo. Paucula inde, quæ vocabulum *πηλικότης* explicant, delibabo.

Περί τι ἀφωρισμένον ποιεῖται τὴν ἐπιστήμην ὁ μαθηματικὸς, ἀποκεκοφὼς ἀπ' ἀμφοτέρου, τοῦ τε πλήθους, καὶ τοῦ μεγέθους. ἀπὸ μὲν τοῦ πλήθους, περὶ τοσόνδε ποσὸν ποιεῖται τὴν ἐπιστήμην. ἀποκόπτει γὰρ δέκα μονάδας, ἢ ιέ, ὁ μαθηματικὸς, καὶ περὶ μὲν αὐτὰς ποιεῖ τὴν ἐπιστήμην. ἀπὸ δὲ μεγέθους, περὶ τοσόνδε πηλίκον, ἤτοι μέγεθος, ποιεῖται τὴν ἐπιστήμην· ἀπο-

Circa determinatum aliquid facit ſcientiam Mathematicus, poſtquam abſcidit ab utraque, (*ſpecie quoti,*) nempe multitudine, & magnitudine: à multitudine quidem, circa tam magnum quotum facit ſcientiam. abſcindit enim decem unitates, aut XV, Mathematicus, & circa illas facit ſcientiam; à magnitudine autem, circa tam magnum quantum,

ſeu magnitudinem, facit ſcientiam. abſcindit enim à magnitudine quinque aut decem cubitos, & circa illos facit ſcientiam. Quantitas autẽ, & quantum, eſt magnitudo continua.

κόπτει γὰρ ἀπὸ τοῦ μεγέθους πέντε ἢ δέκα πήχεις, καὶ περὶ αὐτοὺς ποιεῖ τὴν ἐπιστήμην. ἡ δὲ πηλικότης, καὶ τὸ πηλίκον, μέγεθός ἐστι συνεχές.

Eadem ſignificatione & multis aliis hoc vocabuli eſt uſurpatum. Egregie Theo Smyrnæus. *Τοῦ μὲν ποσοῦ στοιχεῖον ἡ μονάς· τοῦ δὲ πηλίκου, στιγμή· λόγου δὲ καὶ ἀναλογίας, ἰσότης. οὔτε γὰρ μονάδα ἔτι διελεῖν ἐστιν εἰς τὸ ποσόν· οὔτε στιγμὴν, εἰς τὸ πηλίκον· οὔτε ἰσότητα, εἰς πλείους λόγους. Quoti elementum eſt unitas; quanti, punctus; rationis & proportionis, æqualitas. Neque enim unitas amplius dividi poteſt in quotum; neque punctus, in quantum; nec æqualitas, in plures rationes.* Idem: *μονὰς ἐστὶ περαίνουσα ποσότης, ἀρχὴ καὶ στοιχεῖον τῶν ἀριθμῶν. Unitas eſt terminans quotitas, principium & elementum numerorum.* Significanter admodum Porphyrius, initio commentarii in XIII caput Harmonicorum Ptolemæi, explicans, quomodo ſpatiis inter ſonos interjectis, pro ipſis ſonorum rationibus uſus fuerit Ariſtoxenus, dicit quod ratio ipſi ſit, *δύο φθόγγων ἀνομοίων ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις. duorum ſonorum diſſimilium, ſecundum quantitatem certa quædam relatio.* Ex his veterum auctorum locis evidens eſt, quid ſit *ποσὸν*, *quotum*, & *ποσότης*, *quotitas*; item *πηλίκον*, *quantum*, & *πηλικότης*, *quantitas.* Jam videamus, quomodo in rationis definitione hoc vocabuli locum habeat. Duobus autem modis ibi uſurpari potuit. Vel enim, ut relationem illam duarum magnitudinum ſpectandam innueret in quoto continuo, ſeu quantitate, & magnitudine; non autem in quoto

diſcreto, ſeu quotitate, & multitudine. quorum alterutrum eum de magnitudinibus inter ſe comparatis ſtatim quilibet cogitaturus eſſet, neceſſariò hîc erat definiendum. Quæ explicatio utcunque etiam eſt Scholiaſtæ pag. 12. Vel, ut ſignificaret, infinitas magnitudines ab hac comparatione eſſe excluſas. quod priori Scholiaſtæ placet pag. 10. Ac ſi ita locutus fuiſſet Euclides : *Ratio eſt duarum magnitudinum ejusdem generis, quatenus finitæ ſunt, mutua quædam relatio.* Quæ quidem vera eſt determinatio, ſed ab Euclide hîc non attenta; verùm, ipſa magnitudinum adpellatione, ſuppoſitâ. Ideoque quales ſunt magnitudines, nempe finitæ, talis etiam eſt illa relatio, finita & certa : & propterea πηλικότητι, certa & finita magnitudine minorem ſuperat major. Quod ſi magnitudinibus hanc determinationem neceſſariò adjungendam cenſuiſſet, nihilominus his vocibus, κατὰ πηλικότητα, retentis, definitionem his verbis concepiſſet : λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν πεπερασμένων, ἡ κατὰ πηλ· *Ratio eſt duarum magnitudinum finitarum, ſecundum quantitatem.* quomodo Elementorum libri primi propoſitionibus I & X. εὐθεῖαν πεπερασμένην, *rectam finitam*, adſumſit. Quare vocabulum πηλικότης illo fine non adhibuit; ſed alio, ne ſcilicet ſiniſtrè in numero illa relatio ſpectaretur : ut factum ab Eutocio, Theone, & aliis. Univerſalior enim eſt ratio in quantitate ſpectata, eâ quæ ſpectatur in numero : quod non omnis ratio in quantitate ſpectata, numeris explicari poſsit. Deinde in eo graviter peccat, doctus alioqui Scholiaſtes, quod has voces, κατὰ πηλικότητα, *ſecundum quantitatem*, cum magnitudinum notione conjungendas

putat, cum Euclides ipſe relationis notioni illas adjunxerit: quod articulus ἡ in Græca definitione indicat. *λόγος ἐϛὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.* Cæterùm ſuppoſuiſſe Euclidem, magnitudinum adpellatione finitas hîc intelligi, ex eo adparet, quod aliàs primæ definitioni libri V eodem modo hæc determinatio fuiſſet addenda, cum *pars* ipſi finitur, *magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.* Quod idem dicendum de ſecunda definitione, quâ, quid multipla magnitudo ſit, explicavit. Itaque ſola prior explicatio vera exiſtit. Hoc enim voluit Euclides, ſecundum quantitatem capiendam eſſe hanc relationem, non autem, ſecundum quotitatem. ſeu, in quoto continuo, vel, ut ita cum vulgo loquar, in quantitate, ſeu magnitudine continua, ſpectari relationem illam; non autem in quoto diſcreto, ſeu numero. Ita enim quadrati diametrus ad latus rationem habet, aliæque numero ineffabiles magnitudines, ſi cum ejusdem generis magnitudinibus comparentur. Et hac de cauſa huic tertiæ definitioni ſtatim quartam ſubjunxit, quæ hoc melius explicaret; nempe, omnes ejusdem generis magnitudines rationem inter ſe habere, quæ, ſi multiplicentur, ſe invicem ſuperare poſsint. Si rationem in Arithmetica definire voluiſſet Euclides, ne quidem additurus fuiſſet, *κατὰ ποσότητα, ſecundum quotitatem,* duorum numerorum, aut etiam, numeratarum rerum, inter ſe relationem ſpectari: quod numerus cum numero comparari nequeat, niſi ſecundum numerum, quo major ſuperat minorem; vel contrà, minor à majore ſuperatur; vel etiam, alter alteri

eſt æqualis. Quoti enim ad aliud relati duæ ſunt ſummæ & generales diviſiones, æqualitas & inæqualitas. Itaque Nicomacho II libro Arithmeticæ Ratio finitur, *δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλες σχέσις. duorum terminorum* (duarum rerum numero finitarum) *inter ſe relatio.* Theoni Smyrnæo, cujus definitionem Arithmeticam ſuprà pag. 9. primo loco retuli; *δυοῖν ὅρων ὁμογενῶν, duorum terminorum ejusdem generis:* determinatione adjectâ, ut ſint ejusdem generis. Porrò idem ferè fuiſſet, ſi pro *κατὰ πηλικότητα, ſecundum quantitatem*, dixiſſet, *κατὰ μέγεθος, ſecundum magnitudinem*, quod Scholiaſtes habet pag. 11. v. 22. niſi ad peculiarem vocabuli *πηλικότης* uſum reſpexiſſet. quem exemplo ſum illuſtraturus. Sint enim in ſchemate pag. 42. duæ lineæ BF, FA. quarum major BF referatur ad minorem FA. Sunt itaque finitæ. Si enim vel utraque, vel alterutra infinita eſſet, neutra ad alteram referri poſſet. Itaque ſuppoſita illa determinatione, generaliter quæro *πόσῳ, quoto*, ſeu, quotâ parte minoris AF, major FB illam minorem ſuperet. Reſpondere poſſum, *τοσῷδε πηλίκῳ, tanto quanto*, demonſtrativè; vel, quod commenſurabiles ſint magnitudines, *τοσῷδε ποσῷ, tanto quoto.* Nempe cum BF talium ſit IX partium, qualium FA, VI; major BF ſuperat minorem FA, *ποσότητι, quotitate* III. adeoque etiam *πηλικότητι, certa magnitudine*, exempli gratia, FN. Sint rurſus in eodem ſchemate duæ lineæ, AB, BF. Quæro, *πόσῳ*, quotâ parte minoris FB, major BA illam minorem FB ſuperet. Non poſſum dicere, *τοσῷδε ποσῷ*, quod ratio lineæ AB ad lineam BF ſit ineffabilis, ſeu, numero inexplicabilis. recte autem

dicam, *τοσῷδε πηλίκῳ*, tanta quantitate, exempli gratiâ, FN. ſeu, ut cum Euclide loquar, *κατὰ πηλικότητα* FN. Quare *τὸ* quantum ſemper exhibere poſſumus; quotum autem, non niſi cum rationis magnitudines ſunt commenſurabiles. Cæterum generale eſſe vocabulum *τὸ ποσὸν*, quod & magnitudinem, & multitudinem comprehendat, diſcimus ex Scholiaſte pag. 10. v. 24. & ex Aſclepio, multis locis. Sextus Empiricus *πρὸς μαθηματικοὺς* quarto libro eodem uſu accepit. *Ἐπειδὴ τοῦ ποσοῦ τὸ μέν ἐστιν ἐν τοῖς συνεχέσι σώμασιν, ὃ δὴ μέγεθος καλεῖται, περὶ ὃ ἐστι μάλιστα ἡ γεωμετρία. τὸ δὲ ἐν διεστῶσιν, ὅπερ ἀριθμὸς καθέστηκε, περὶ ὃν ἡ ἀριθμητικὴ καταγίνεται.* *Quoniam quoti aliud eſt in corporibus continuis, quod magnitudo vocatur, circa quem in primis verſatur Geometria; aliud in diſcretis, quod numerus exiſtit, circa quem Arithmetica occupatur.* Latinus ſermo adeo propriè hæc vocabula exprimere nequit. Rectius forſan *τὸ ποσὸν* verteretur *aliquotum*, quia *πόσον* eſt *quotum*. cæterorum interpretationem haud facile meliorem reddemus. Ex iis autem quæ hactenus diſſerui, liquere poteſt, ex interpretibus nullum, quid *πηλικότης* eſſet, percepiſſe. Federicus Commandinus, limati judicii mathematicus, vertit; *quatenus ad quantitatem pertinet.* perperam; ſed cum pejore adhuc explicatione: *Vide ne hoc potius dictum ſit, ut intelligatur proportio, quæ in quantitate; non item ea, quæ in æſtimatione conſiſtit.* Hunc autem ſcrupulum ipſi injeciſſe videri poſſit ſcholium, quod in Græca editione ante V librum legitur, cujus hæc ſunt verba: *ἀλλ' εἴη ἂν οὗτος ὑπὸ τὸ ποσόν. διττὸς γὰρ ὁ λόγος· ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ. καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδέν ἐστιν εἶδος* (le-

gendum ὄφελος. aut addendum χρήσιμον, poſt vocem χρεῖαν.) *πρὸς τὴν παροῦσαν χρεῖαν· τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστὶ έ. Sed hac (rationis ratio) ſub quotum cadit. Duplex enim ratio eſt: alia in æſtimatione; alia in quoto ſpectata. Et quidem rationis in æſtimatione ſpectata nullus in hac contemplatione uſus: alterius autem, in quoto, quinque ſunt ſpecies.* Iſta ergo explicatio admodum mihi videtur inepta. Quid enim? in Mathematicis, cum tam multa de magnitudine docuiſſet Euclides, putandus ne eſt ad hanc relationem ſecundum æſtimium, quæ incerta eſt, &, ut ita dicam, infinita, definiendo reſpexiſſe? Nec magis hoc verum eſt, ſi vel primo loco hic quintus liber fuiſſet poſitus. quippe jam, quid pars eſſet, definierat, & quid multiplum. Hunc ſecutus Clavius, *ſecundum quantitatem* explicat, *ſecundum quod una major eſt quàm altera; vel, minor; vel, æqualis.* Quod æque verum eſſet, ſi pro κατὰ πηλικότητα, Euclides dixiſſet, κατὰ ποσότητα. Quinimò ſi planè hæc verba omiſiſſet, ut Arithmeticis factũ ſuperius vidimus, nihilominus hæc conſideratio locum habuiſſet. Nec egregium illud ſcholium, pagina 12 adpoſitũ, Commandinus intellexit, ut ex ipſius verſione liquet, & hoc adjuncto commentario: *Hoc idcirco dictum videtur, ut infinita magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quantumlibet multiplicata tantum abeſt ut infinitam magnitudinem exuperet, ut ne æquare quidem poſſit unquam.* Qvæ quidem omnes hallucinationes inde propullularunt, quod vim vocabuli πηλικότης interpretes ignorarent. Videamus nunc, quid ad alteram definitionem explicandam hoc vocabuli, rectè acceptum, conferre poſ-

ſit. Eucl. Hæc non ſine admiratione quadam, Hermotime, te narrantem audio. Haud putaſſem, tantùm obſcuritatis interpretibus præbiturum fuiſſe vocabulum *πηλικότης*. quod ſane eo ſenſu, quo recte explicavit Euthymius, ab omni antiquitate eſt uſurpatum. Nimirum ex Græcæ litteraturæ, in Græcis diſciplinis cognoſcendis, neglecta cultura quid non ubique errorum eſt enatum? Hermot. Majore cum admiratione me de altera definitione diſſerentem audies. Nam & clari mathematici, & Græci, reprehenſionem incurrent. quorum duos, ne ignotos accerſam, & obſcuros, hîc præſentes vides; Eutocium dico, & Theonem. Diſerte enim uterque per rationis *πηλικότητα*, *quantitatem*, te intelligere dicit *ποσότητα*, *quotitatem*, ſeu, ut ipſi loquuntur, numerum denominatorem, à quo ratio denominatur. quod quale ſit, ſuperiùs narravi. Nempe, cum dico, ratio dupla, numerum duo nomino, à quo hæc ratio nomen habet: qui numerus duo, eſt quantitas ſeu magnitudo rationis duplæ. Sic triplæ rationis quantitas eſt numerus ternarius, à quo illa denominatur: ſextuplæ rationis, numerus ſex: ſupernonæ rationis $\frac{10}{9}$ quantitas eſt $1\frac{1}{9}$: ſuperoctogeſimæ, $1\frac{1}{80}$. Eucl. Hoc equidem mihi perſuadere nequeo, adeo inconſideratum fuiſſe noſtrum Eutocium, virum eximium, quem omnes ex editis in libros divini noſtri Archimedis commentariis *μαθηματικώτατον* judicant. Eutoc. Nunquam crediidiſſem, ô Euclide, tam facile, non dicam, novis dogmatis te capi potuiſſe, ſed verbis, quæ nobis facere videtur hic Hermot mus. Quamvis non poſſim non adſentire iis, quæ de vocabulo *πηλικότης* expli-

cavit. Hæc enim clarorum mathematicorum auctoritate ſunt roborata. Sed quid dices, ſi non tantùm ex tuæ definitionis verbis hoc me collegiſſe oſtendam, ſed etiam demonſtratione hanc explicationem confirmaſſe. Cùm propoſitarum rationum quantitates in ſeipſas multiplicantur, inde fieri inquis rationem. Per πηλικότηλα, quantitatem cujusque rationis, vel intelligis illius rationis magnitudinem, quæ in duorum terminorum, vel continuorum, vel diſcretorum, relatione ſpectatur; ſecundum quam magnitudinem una ratio alterâ major minorve cenſetur; vel etiam, ipſas magnitudines, ſeu terminos, qui rationem conſtituunt, & quaſi comprehendunt. Poſterius intelligere nequis. Neque enim rationis alicujus termini, inter ſe multiplicati, alterius rationis, cum qua illa comparabitur, vel antecedentem terminum, vel conſequentem conſtituent. quod exemplis probabo. Sint enim duæ rationes, ſeſquialtera $\frac{3}{2}$, & ſuperquarta $\frac{5}{4}$. quarum terminos, ſeu quantitates, nempe rationis ſeſquialteræ, 3 & 2, *in ſeipſas*, ἐφ' ἑαυλὰς; ita enim loqui amas, vel potius, ἐπ' ἀλλήλας, *inter ſe* multiplicatæ, faciant 6. item rationis ſuperquartæ quantitates, 5 & 4, inter ſe multiplicatæ faciant 20. Nequaquam, ſcio, dices, rationem $\frac{6}{20}$ ſeu $\frac{3}{10}$. aut, ſi majorem numerum antecedere velis, $\frac{10}{3}$. compoſitam eſſe ex duabus rationibus, $\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{4}$. Quamvis in innumeris exemplis id ſit verum. Sic enim multiplicati rationum $\frac{2}{1}$. $\frac{3}{2}$ termini compoſitam ex ipſis rationem facient $\frac{6}{2}$ ſeu $\frac{3}{1}$. & $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}$ rationem $\frac{12}{6}$. & $\frac{2}{1}$. $\frac{10}{9}$ rationem $\frac{90}{72}$, ſeu $\frac{10}{8}$, ſeu $\frac{5}{4}$. quoniam in his exemplis tres numeri immediate ſe ſequentes, rationes duas con-

ſtituunt: adeoque, ſi duo extremi, rationem exhibentes, eodem numero intermedio multiplicentur, ratio illa variari nequit. HERMOT. Optime hoc, Eutoci, & plane ex Euthymii ſententia. Inſulſa eſſet illa rationum compoſitio. Attamen nec priorem tuam ſententiam ullo modo veram cenſet. Cauſam jam dixi, quod *πηλικότητας quantitates*, velis eſſe *ποσότητας, quotitates.* Atqui *πηλικότητας*, quantitates rationum inter ſe multiplicandas dicit Euclides; non *ποσότητας*, numeros hujusmodi, quibus rationum effabilium antecedentes, ad unitatem, tanquam communem conſequentem, relatæ explicentur. quod hoc modo rationes numero ineffabiles componi nequeant. Sed & ipſe; quod notandum dicebat Euthymius; de hac tua explicatione, quam aliorum mathematicorum auctoritate ſeductus, obtinere petis, dubitas, cum in ſcholio in XI propoſitionem libri I. Conic. Apollonii, *ἀῤῥήτων*, magnitudinum numeris ineffabilium mentionem facis, quas ſecundum hanc explicationem componi poſſe recte negabis. Componi autem poſſe docebit te deinde Euthymius. *Per quantitatem*, inquis, Commandino interprete, *intelligendo numerum, à quo proportio ipſa denominatur. In multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer; in reliquis verò habitudinibus neceſſe eſt quantitatem numerum eſſe, & partem, ſeu partes. niſi forte quiſpiam velit etiam ἀῤῥήτους, videlicet quæ exprimi non poſſunt, habitudines eſſe, quales ſunt magnitudinum irrationalium.* EUCL. Recte hoc ultimum addis, Hermotime. Non vidére illi, me vocabulo *πηλικότης* reſpexiſſe etiam ad numeris ineffabiles rationes, quas componere Geometra

poteſt, aut illarum minorem à majore auferre. Hermot. Contrà cenſet Eutocius, qui rationum compoſitionem Arithmeticæ conſiderationis eſſe ſtatuit, & primò numeris, deinde per numeros etiam magnitudinibus ineſſe dicit. Verba ex illo in Apollonium ſcholio proferam: *Non perturbentur autem qui in hæc inciderint, quod rationum compoſitio ex arithmeticis demonſtretur. Antiqui enim hujusmodi demonſtrationibus ſæpe uti conſueverunt; quæ tamen mathematica potius ſunt quàm arithmetica, propter analogias. Adde quod quæſitum Arithmeticum eſt. nam proportiones, proportionum quantitates, & multiplicationes primo numeris, ſecundo loco per numeros & magnitudinibus inſunt.* Ad hæc, inquiebat Euthymius, multis diſputare nolo. quippe ad illam quæſtionem devenietur, utra harum ſcientiarum naturâ prior ſit; Arithmetica, an Geometria. Sed in noſtra diſputatione illud quæritur, in quanam harum ſcientiarum generalius ratio ſpectetur, utrum in Geometria, an in Arithmeticâ. In Geometria dicit cum Euclide, & procul dubio etiam cum divino Archimede Euthymius. Archim. Attente Hermotimum, Euthymii ſui dogmata narrantem, audio, quem commodiorem hactenus, ô Euclide, inveniſti quàm putaras. Illa ipſius explicatio vocabuli πηλικότης in tua rationis definitione eſt veriſſima. Eandem illius vocabuli ſignificationem, & uſum, in definitione rationum compoſitionis ſumma cum ratione admittendam ſtatuit. Ut autem ibi duobus modis hoc vocabuli acceptum differuit; ita etiam in hac definitione duabus ſententiis, ex diverſa hujus vocabuli acceptione, variatur. quarum illa, quam Euthymius profert,

nempe *τηλικότητας*, *quantitates* te dixiſſe, ut ſignificares, etiam numeris ineffabiles magnitudines rationem habere, & hujuſmodi rationes componi poſſe, noſtra eſt, & veterum omnium ſententia, adeoque veriſsima. HERMOT. Exploſâ itaq; Eutocii, & reliquorum, ſententiâ, de quantitate rationis numero exhibendâ, altera non minor difficultas ventilanda reſtat; utrum per *τηλικότητας*, *quantitates*, in hac definitione, ipſæ rationum magnitudines, antecedentes & conſequentes, intelligendæ ſint; an verò rationum quantitates; quæ in antecedentium ad conſequentes relatione ſpectantur; non quidem numeris, ſed magnitudinibus, exhibitæ. Utraque ſententia ſuas cauſas habet, quas ordine pandam. Sed prius, inquiebat Euthymius, quomodo rationes, numeris exhibitæ, componantur, tibi explicabo. Sint duæ rationes, $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, quas componere, ſeu addere, velis. Antecedentes igitur harum duarum rationum, 3 & 4, inter ſe multiplicabis; fiunt 12. & item conſequentes, 2 & 3; fiunt 6. Hi duo facti numeri; nempe antecedens 12, factus ex duobus antecedentibus; & conſequens 6, factus ex duobus conſequentibus; rationem conſtituunt duplam $\frac{12}{6}$; ſeu in minimis terminis $\frac{2}{1}$; compoſitam ex duabus rationibus, nempe ſeſquialtera $\frac{3}{2}$, & ſupertertia $\frac{4}{3}$. quod ſic planum fiet. Multiplicetur decuſſatim, *χιαστικῶς*, vel prioris rationis antecedens in poſterioris conſequentem, ut fiat 9; vel prioris rationis conſequens in poſterioris antecedentem, ut fiat 8. Si enim alterutrum numerum; vel 9, vel 8; medio inter 12 & 6 loco collocaris, videbis rationes duas, $\frac{12}{9}$. $\frac{9}{6}$. vel $\frac{12}{8}$. $\frac{8}{6}$, prioribus duabus $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}$ æquales. Sic $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$ compoſitæ, fa-

ciunt rationem $\frac{6}{2}$ ſeu $\frac{3}{1}$. multiplicatis inter ſe rationum harum antecedentibus, 2 & 3; & conſequentibus, 1 & 2. Item $\frac{2}{1}$ & $\frac{2}{1}$ compoſitæ; id eſt, $\frac{2}{1}$ duplicata; faciunt $\frac{4}{1}$. & ratio $\frac{3}{2}$ duplicata facit rationem $\frac{9}{4}$. Quod ſi minorem rationem â majore auferre velis, primum explorandum tibi, utra propoſitarum rationum ſit minor. quod fit reductis rationibus ad communem terminum; vel antecedentem, vel conſequentem; ut ſupra pagina 76 vidimus. Ita enim ad communem conſequentem reductæ rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, erunt $\frac{9}{6}$ & $\frac{8}{6}$. Major $\frac{9}{6}$; minor $\frac{8}{6}$, ob cauſam ibi dictam. Exceſſus autem, quo major ratio $\frac{9}{6}$ minorem $\frac{8}{6}$ ſuperat, eſt ratio $\frac{9}{8}$. Similiter rationes, $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, reductæ ad communem, exempli causâ, antecedentem, erunt $\frac{12}{8}$ & $\frac{12}{9}$. quarum major $\frac{12}{8}$ ſuperat minorem $\frac{12}{9}$, ratione $\frac{9}{8}$. quod ſi ad communem conſequentem illas reduxeris, $\frac{9}{6}$. $\frac{8}{6}$, eandem exceſsivam rationem $\frac{9}{8}$ habebis. Idem vulgari operatione conſequéris. Alterutrius enim propoſitarum duarum rationum termini invertantur; deinde antecedentes inter ſe multiplicentur, & item conſequentes. ſi inſuper decuſſatim multiplicaveris, habebis communem terminum, medio loco collocandum, ad quem extremi relati, majorem rationem & minorem indicant. Secundum hanc operationem rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$ ſic collocatæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{3}$, dabunt hos tres terminos, 8.6.9. quorum extremi 8 & 9, rationem exceſsivam conſtituunt: medius autem communis eſt, ad quem utriusque rationis $\frac{8}{6}$ & $\frac{9}{6}$ quantitas expenditur. Si poſterioris rationis in hoc exemplo terminos invertas, $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{4}$ operatione factâ hos habebis terminos, 9.12.8. in quibus idem perſpicitur. Jam

ad propoſitum revertamur. Si igitur per πηλικότητας, *quantitates* intelligi Euclides voluiſſet ipſas rationum magnitudines, antecedentes & conſequentes; quales ſunt termini, 3 & 2, rationis $\frac{3}{2}$. item 4 & 3, rationis $\frac{4}{3}$. aliter locuturus fuiſſet; certe loqui debuiſſet. hoc nempe modo: λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι, αἱ μὲν ἡγούμεναι ἐπὶ τὰς ἡγουμένας αἱ δὲ ἑπόμεναι ἐπὶ τὰς ἑπομένας, ποιῶσί τινα λόγον. *Ratio ex rationibus compoſita dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicata: antecedentes quidem in antecedentes; conſequentes autem in conſequentes: fecerint aliquam rationem.* EUTOC. Imò verò his verbis illam definitionem concepiſſet: ὅταν τὰ τῶν λόγων ἡγούμενα ἐπ' ἄλληλα πολλαπλασιασθέντα, ποιῶσιν ἡγούμενον· καὶ ὁμοίως τὰ ἑπόμενα, ἑπόμενον. *cum rationum antecedentes (magnitudines) inter ſe multiplicata, fecerint antecedentem; & ſimiliter conſequentes, conſequentem.* Nam quid ἡγούμενον μέγεθος καὶ ἑπόμενον, antecedens magnitudo eſſet, & quid conſequens, jam quinto libro definierat. HERMOT. Acute hoc mones. Attamen magis Euclidi placuit vocabulum πηλικότης. pro quo, ut ſupra monui, pagina 86. in rationis definitione uſurpare potuiſſet vocabulum μέγεθος. niſi Pythagoricos ſecutus, omnis matheſios parentes; quorum inter τὸ ποσὸν, *quotum*, & τὸ πηλίκον, *quantum*, diſtinctiones paulo ante retuli; ſolemnia illorum vocabula potius adhibenda cenſuiſſet. Iſtud autem ἐφ' ἑαυτάς, *in ſe ipſas*, quod & tuo, Eutoci, tempore in hac definitione lectum fuit, pro quo ἐπ' ἀλλήλας reponendum monui, ab inſulſis librariis, & παραδιορθωταῖς, mutatum

cenſet. Porro ſi alteram ſententiam ſequamur, quæ majorem in re, quam in verbis difficultatem parit, ita loqui potuiſſet: *λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι, (ἤγουν, ἀλλήλας πολλαπλασιάσασαι,) ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου. Ratio ex rationibus conſtare dicitur, cum rationum illarum quantitates inter ſe multiplicatæ* (ſeu *poſtquam ſe invicem multiplicaverint,*) *fecerint aliquam rationis quantitatem.* In ipſa re dixi majorem eſſe difficultatem, quod hac multiplicatione quantitatum, tantùm unam quantitatem, ſeu terminum antecedentem nanciſcamur, adeoque non rationem; quod erat propoſitum. quippe non terminus ex rationibus componi dicebatur, ſed ratio. Hanc tamen ſententiam inſigni quadam interpretatione ſe juvare poſſe dicebat Euthymius; nempe, ut dicamus, conſequentem rationis terminum ubique eſſe unitatem. Quod etiam adparet ex ipſis rationum nominibus, quæ illarum quantitatem, ſecundum Eutocii, & Arithmeticorum ſententiam, exprimunt; cum tantùm antecedentem rationis effabilis terminum nominent, cujus conſequens eſt unitas. Hoc in multiplis rationibus eſt evidens; ut in dupla, denominator eſt duo, terminus antecedens rationis duplæ, cujus conſequens eſt unitas. Sic triplæ rationis denominator & antecedens eſt 3. octuplæ, 8. In ſuperparticularibus denominator ille eſt unitas & particula; in ſeſquialtera, unitas & ſemis, $1\frac{1}{2}$; in ſupertertia, $1\frac{1}{3}$; in ſuperquarta, $1\frac{1}{4}$; in ſuperquintadecima, $1\frac{1}{15}$. quæ omnes communem habent conſequentem, unitatem. Superpertes nomen habent ab unitate & aliquot partibus, tanquam

antecedente termino, ſimiliter ad unitatem, tanquam omnium rationum communem conſequentem, relato. Et quidem ſi partes illæ ſint duæ tertiæ, ratio ſuperbitertia dicitur; ab antecedente $1\frac{2}{3}$: ſi tres quartæ, ſupertriquarta, ab antecedente $1\frac{3}{4}$. Hic autem antecedens in numeris invenitur, diviſo antecedente propoſitæ rationis termino per ejus conſequentem: adeoque eſt, ut propoſitæ rationis conſequens ad ſuum antecedentem, ita unitas, tanquam conſequens, ad hunc novum antecedentem. exempli gratia, ut 2. 3 : 1. $1\frac{1}{2}$. & hoc eſt, quod tu, Eutoci, de rationum compoſitione demonſtraſti. EUTOC. Hæc confirmandæ meæ ſententiæ faciunt. HERMOT. Si quoque de conſequente rationis termino, ſeu unitate, mentionem injeciſſes. Ita enim denominatores tuos conſideras, ac ſi uno illo antecedente termino, rationis quantitas eſſentialis exprimatur. quod plane impoſsibile dicit Euthymius. Nec Euclidem puto huic poſteriori explicationi definitionis ſuæ adſenſurum. EUCL. Prima explicatio mentem meam, quam definiendo expreſſeram, interpretatur; quamvis ingenioſa quoque ſit poſterior. ſed illam incommoda non pauca ſecum trahere video. Illud ſane me maxime adfligit, tantum errorum ſuccreviſſe ex meis definitionibus, quarum ſenſum partim non perceperunt viri eximii, partim ſupini librarii corruperunt. HERMOT. Præterea, quod toties dixi, numeris ineffabiles rationes hæc doctrina de denominatoribus non comprehendit, quod maximum eſt in Eutocii interpretatione erratum. Illas autem, quibuscunque irrationalibus lineis exhibitas, ita componemus.

Bb

Sint duæ rationes ineffabiles, A, B : C, D. quas componere, ſeu addere, velim. Ducatur linea infinita, FG. & à quovis in ea puncto E ponatur linea EF, æqualis ipſi A; & ab altera parte puncti E, linea EG,



æqualis ipſi C. Deinde ſupra diametrum F G deſcribatur ſemicirculus. & à puncto E erigatur perpendicularis EH. Rurſus in linea FG infinita, ſumatur ab una parte EK, æqualis ipſi B; & ab altera parte EL, æqualis ipſi D. & ſupra diametrum KL deſcribatur ſemicirculus, perpendicularem HE ſecans in M. Poſtea fiat, ut ME ad EH, ſeu EN ipſi æqualem, ſic HE ad EO. Dico rationem OE ad EM, compoſitam eſſe ex duabus rationibus A, B; C, D. Cujus demonſtratio ex Euclidis Elementis eſt manifeſta. Cum enim rectangulo ab A, C; hoc eſt, FE, EG; æquale ſit quadratum ab HE: item rectangulo à B, D; hoc eſt, KE, EL, æquale ſit quadratum ab ME; & æquangula rectangula rationem inter ſe habeant ex lateribus compoſitam: erit ratio quadrati ab HE, ad quadratum ab EM, compoſita ex ratione A ad B, & ratione C ad D.

Rationis autem quadratorum ab HE & EM dimidia eſt ratio laterum HE, EM. & hujus rationis dupla, ex conſtructione, ratio OE ad EM. quod monſtrare oportebat. Harum autem rationum magnitudines ſecundum hos numeros adſumſit. A media & irrationalis, æqualis eſt lateri lateris quadrati; ſeu, ut loquuntur, radici radicis ex *6912*. B, eſt partium *6*. C, radix ex 32. D, radix ex 10. EUCL. Optime hoc, Hermotime, & plane ad noſtram mentem. Sic antiqui rationes compoſuerunt, poſitione datas, & numeris ineffabiles. HERMOT. Non intellexére igitur propoſitionem XXIII ſexti elementi, qua definitionis illius de rationum compoſitione exemplum demonſtraſti. Hæc autem omnia, quæ vobis narro de rationum compoſitione, & de verbis, quibus illa eſt tradita, nunquam, inquiebat Euthymius, ſe moturum fuiſſe, niſi falſiſsimum dogma, & quod maximam errandi anſam aliis præbuit, inde fuiſſet fabricatum. Hac enim denominatorum inter ſe multiplicatione fultus hic Theo Alexandrinus, geometra alioqui eximius, quod ex Commentariis in Ptolemæi Magnam Conſtructionem videre eſt, adſeruit, triplæ rationis duplam eſſe ſextuplam. Verba ejus ſuprâ, paginâ 25. v. 28. & pag. *26*. v. 18. propoſui; quæ ex Commentariorum libro primo, vulgatæ editionis pag. *62*, ſunt deſumpta. Hunc ſecuti recentiores, volumina ſua his paralogiſmis impleverunt. Elementa quoque tua, Euclide, ad quæ fuſe hoc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre ſunt coacta. EUCL. Hac narratione percellor, nec, quid dicam, habeo. An Theo, noſter Theo, dixit, rationem

ſextuplam eſſe duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore ſine ratione mathematici conſiderarunt? nec Græca verba tum homines intellexerunt, quibus quæ ratio alterius eſſet dupla, quæ tripla, & quadrupla; quæ ſeſquialtera eſſet ratio alterius rationis, & ſupertertia, & ſuperquarta, &, ut verbo dicam, quacunque poſsibili ratione alteram ſuperans, aut ab illa deficiens? THEO. Certe cum ratione hoc adfirmaſſe videbor, ſi demonſtratio mea inſpiciatur, & rerum natura, ex qua exempla, ad amuſsim quadrantia, depromere poſſum. HERMOT. Hoc poſtea videbimus. Hunc verò errorem ampliavit Gregorius à S.to Vincentio, qui grande illud opus Geometricum, de Quadratura Circuli, ante ſeptem annos edidit, ſi effectum ſpectemus, conatu ſolo laudabile. Hic, ut ſcopum feriret, de rationum proportionibus, ſeu, ut ipſe cum Boëthio vocat, Proportionalitatibus Geometricis, protulit nova inventa; revera autem multa nova errata. Namque in ſolo octavo libro, qui hujus doctrinæ fundamenta continet, centum ſeptendecim falſas propoſitiones numeravit Euthymius: tot nimirum, quot Euclidéis fundamentis carent. APOLLON. Hîc magnam tempeſtatem ſurgere video. Revera mira mihi accidunt, quæ hic narrat Hermotimus; cum ab illo tempore, quo hac quiete mihi frui licuit, nullum hujusmodi evidentibus erroribus circumventum audiverim, cujusmodi, florentibus adhuc literarum ſtudiis, & Græca humanitate, eximios viros abactos dicit. ARCHIM. Et me, fateor, hæc turbant. Si enim Euclidis elementis, facilibus, & extra errandi aleam, ut nobis ſemper viſum

eſt, poſitis, iſthuc accidit, quid de meis ſcriptis, eorumque interpretatione, factum putabo? Illis enim, tanquam firmiſsimis fundamentis ſuperſtruens, in demonſtranda octava propoſitione libri ſecundi de Sphæra & Cylindro, rationem $\frac{27}{8}$ dixi *ἡμιόλιον*, ſeſquialteram rationis $\frac{18}{8}$ ſeu $\frac{9}{4}$. & rationem $\frac{9}{4}$ eſſe *διπλασίονα*, duplam rationis $\frac{9}{6}$ ſeu $\frac{3}{2}$. Quî aliter loqui potui; quî aliter ratiocinari? HERMOT. Eadem ſolidâ explicatione confirmavit tuus Eutocius. Sed, ut vides, nec Theo hoc intellexit, nec ex poſterioribus mathematicis, ad noſtra uſque tempora, ullus. Illos autem errores, ut dicere ſolet Euthymius, ob neglectum Muſices ſtudium, quæ in rerum omnium rationibus ac proportionibus inveſtigandis occupatur, mathematicis Deus immiſit; uti olim Deliis Apollo peſtem, quod Geometriæ, quæ in rationibus ac proportionibus demonſtrandis verſatur, nullam illi operam darent. Hoc ex propoſito iis problemate de cubi duplicatione liquet, cujus perficiendæ nullam aliam viam reperiemus, quam quæ, inventis inter rectas duas lineas, quarum major minoris dupla eſt, duabus mediis proportionalibus, ſolerter ab Hippocrate Chio eſt excogitata. In naturalibus autem vix ulla evidentiora exempla reperiemus omnium quæ in rationum doctrina diſquiruntur, quam quæ Muſica ſuppeditat. Sed noſtro tempore ſi quis Muſica cognoſcere deſideret, fundamentis illorum neglectis, ad ipſam praxin feſtinat, quam ſine cauſa & demonſtratione addiſcit. Itaque in millenis hujuſmodi muſicis vix unus canonicus invenietur, cum olim omnes Pythagorici eſſent canonici, & in canonis ſectione præcipuum ſtudium

Cc

collocarent. Cæterum multa hîc movenda dicebat Euthymius, antequam ſolide ad Theonis argumenta, & Vincentii omnes falſas propoſitiones, reſpondere poſsimus. Hæc vobis ediſſerere conabor, ſed ea lege, ut ſilentium plane Pythagoricum ſervetis. EUCL. Servabimus, modo paralogiſmis nullis tua intricaveris. HERMOT. Evidentiſsimis exemplis, & ex media turba petitis ea ſum illuſtraturus, quæ rerum naturam preſſo veſtigio ſequendo in rationum Geometricarum doctrina primus, omnis antiquitatis, & veſtra poſtea, uti ſpero, confeſsione, invenit Euthymius. Fingamus itaque lineam Nn (in diagrammate pag. 98.) eſſe terræ diametrum, cujus centrum, A. quatuor autem homines, Septimium, Octavium; Nonium, Decium, in A, tanquam terræ centro, conſiſtere; quorum bini, Septimius & Octavius, ad nos evadere conentur per radium AN; reliqui bini, Nonius & Decius contrà, ad noſtros antipodas, per radium An. Ponamus primum, omnes æquali celeritate ad ſuperas auras tendere. Quare quo temporis ſpatio, ex eodem loco A, ruditer loquendo, iter ingredientes Septimius & Octavius veniunt in B; Nonius & Decius, in alteram verſi partem, perveniunt in b: & cum Septimius & Octavius veniunt in C; Nonius & Decius veniunt in c: bini ac bini, æquali celeritate iter accelerantes, donec eodem tempore omnes, ad ſuperas auras evadant; ſed in diverſas partes, nempe Septimius & Octavius, ad nos; Nonius & Decius, ad noſtros antipodas. Itaque Septimii celeritas ad celeritatem Octavii eſt in ratione nulla, ſeu nihili; quia cum Septimius unum milliare confecit,

etiam Octavius, ejus comes, confecit iſtud milliare unum: quare iter unius ad alterius eſt, ut 1 ad 1. Et cum Septimius duo milliaria confecit, etiam Octavius eadem duo milliaria eſt emenſus, quæ inter ſe ſunt, ut 2 ad 2. & porro progrediendo, ut 3 ad 3. ut 8 ad 8. ut 100 ad 100. Cum itaque nulla inter Septimium & Octavium in emenſo itinere ſit diſtantia, æqualem rationem, quam nihili ſeu nullam Euthymius vocat, in ipſorum celeritate ſpectamus. Omnes autem nihili rationes, uti ſunt $\frac{1}{1}$. $\frac{2}{2}$. $\frac{3}{3}$. $\frac{8}{8}$. $\frac{20}{20}$. $\frac{100}{100}$. inter ſe ſunt æquales. quemadmodum in Logiſtica omnes notæ nullæ, 0, 0, 0 inter ſe, tanquam nihili res, æquales exiſtunt. Similiter de Nonio & Decio, in alteram partem tendentibus, ratiocinabimur. Rurſus ponamus ſeptem homines, Mævium, Septimium, Octavium, Sempronium, Nonium, Decium, Sejum, in terræ centro A conſiſtere, quorum medius, Sempronius, in centro A immotus maneat: quatuor autem æquis paſſibus iter accelerent; bini ac bini: Septimius & Octavius, ad nos tendendo; Nonius & Decius, ad noſtros antipodas. Mævius autem duplo celerior ſit Septimio, vel comite ejus, Octavio; ſeu, duplo majus iter conficiat Mævius eodem temporis ſpatio, quàm Septimius, vel comes ejus, Octavius. Sejus item in alteram partem verſus, duplo celerior ſit Nonio vel Decio. Quare quo temporis ſpatio Septimius cum comite Octavio veniunt ad B; item Nonius cum comite Decio ad b; Mævius venit ad C, & Sejus ad c. Deinde quando Septimius cum comite Octavio veniunt ad C; item Nonius cum comite Decio ad c; Mævius perrexit in E, & Sejus in e. & ſic ul-

terius progrediendo, in dupla diſtantia. Qua igitur celeritatis ratione, nempe duplâ, Mævius, nobis ſpectantibus, adſcendendo ex centro A, ſuperat Septimium & Octavium; eadem celeritatis ratione Sejus ſuperat Nonium & Decium deſcendendo, noſtri reſpectu, ad noſtros antipodas: id eſt, eadem celeritatis ratione Nonius vel Decius deficit à Sejo. Quare hoc ordine nobis conſpicientur, Mævius, Septimius cum comite Octavio, Sempronius, Nonius cum comite Decio, Sejus. Itaque bini, Mævius & Septimius nobis viciniores, eadem ratione à centro A abſunt, quâ in alteram partem ab eodem centro A diſtant Nonius & Sejus. Ideoque ſi omnes conſiſterent, forte in E, C; c, e, & iter Sempronio, in centro A conſiſtenti, ingrediendum eſſet in alterutram partem, tantundem laboris ſuſcepturus eſſet, ut vel ad Septimium in C veniret, vel ad Nonium in c; item, ut ad Mævium in E pergeret, vel ad Sejum in e. Hæc itaque ſic ſunt ſignanda : $\frac{\text{Mævius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Septimius.}}{\text{Octavius.}}$ $\frac{\text{Nonius.}}{\text{Decius.}}$ $\frac{\text{Nonius;}}{\text{Sejus.}}$ numeris autem ſic : $\frac{2}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.$ Seu, unâ nihili rationum omiſsâ, $\frac{2}{1}.\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.$ Porro ratio dupla, $\frac{2}{1}$ à ratione nihili $\frac{1}{1}$ tanto ſpatio abeſt, quanto ab eadem ratione nihili in alteram partem abeſt ratio dupla $\frac{1}{2}$, quam noſtri reſpectu, & diſtinctius loquendo, ſubduplam cum antiquis vocabimus. Itaque ratio $\frac{1}{2}$ æqualis eſt rationi $\frac{2}{1}$; ſubdupla duplæ : qvamvis ratio $\frac{1}{2}$ non ſit eadem quæ ratio $\frac{2}{1}$. Ideo autem ratio $\frac{1}{2}$ æqualis eſt rationi $\frac{2}{1}$, quod inter illius terminos 1 & 2, Nonium & Sejum, tantum intervallum ſit, quantum inter hujus terminos 2 & 1, Mævium & Septimium. EUCL. Hoc Geometriæ elementis è diametro repugnat. HERMOT.

Pactus ſum ſilentium. poſtea, ubi quæ dicere inceperam, ediſſeruero, tuas demonſtrationes videbimus. Intervallum autem, ſeu diſtantia inter has duas rationes $\frac{2}{1}$. $\frac{1}{2}$ eſt ratio bis dupla, ſeu $\frac{4}{1}$. Quoniam enim ratio nihili $\frac{1}{1}$ ſuperat rationem $\frac{1}{2}$, ratione $\frac{2}{1}$; ſed rationem nihili ſuperat ratio $\frac{2}{1}$, ratione $\frac{2}{1}$. Ergo ratio dupla $\frac{2}{1}$ ſuperat rationem ſubduplam $\frac{1}{2}$, ratione bis duplâ, id eſt, quadrupla. Quod etiam ex additione planum fit. ſi enim rationi ſubduplæ addatur ratio quadrupla, inde fit, ſeu componitur ratio dupla, in his terminis minimis, 2. 4. 1. nempe binarius ad unitatem relatus duplam rationem facit, compoſitam ex ſubdupla, 2 ad 4; & quadrupla, 4 ad 1. Rurſus ponamus octo homines, quorum quatuor, Lucius, Mævius, Septimius cum comite Octavio, à centro A ad nos tendant; reliqui quatuor, Nonius cum comite Decio, Sejus, Titius, à centro A tendant ad noſtros antipodas. Celeritatis autem inter ipſos ſit diverſitas: & quidem Septimii celeritas ad celeritatem Octavii, ſit in ratione nihili; quia dum Septimii comes ponitur Octavius, æque celeres ambo intelliguntur. Sic de Nonio & Decio. Mævii autem celeritas ad celeritatem Septimii ſit in ratione ſeſquialtera; id eſt, Mævius tria milliaria conficiat quo tempore Septimius duo. Rurſus Lucii celeritas ſit ſeſquialtera celeritatis Mævii; id eſt, Lucius tria milliaria conficiat, quo tempore Mævius duo. Ergo eodem tempore, quo Septimius conficit milliaria duo; Mævius conficit tria; Lucius, quatuor ſemis. & cum Septimius confecit quatuor, Mævius emenſus eſt ſex, Lucius, novem. Igitur Lucii celeritas ad celeritatem

Septimii (novem milliaria ad quatuor) dupla eſt celeritatis Mævii ad celeritatem Septimii, (ſex milliarium ad quatuor.) Lucius enim eadem celeritatis ratione ſuperat Mævium, qua celeritatis ratione Mævius ſuperat Septimium: nempe Lucius tres milliarium terniones (hoc eſt, novem milliaria) conficit, dum Mævius conficit milliarium terniones duos, (hoc eſt, ſex milliaria.) Rurſus Mævius tres milliarium biniones (id eſt, milliaria ſex) conficit, dum Septimius conficit biniones milliarium duos, (id eſt, milliaria quatuor.) Hæc ita ſignantur. $\frac{\text{Lucius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Mævius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Septimius.}}{\text{Octavius.}}$ numeris autem ſic: $\frac{9}{4}.\frac{6}{4}.\frac{4}{4}.$ Similiter ad alteram partem, Titius ſeſquialtera celeritatis ratione ſuperet Sejum; Sejus item ſeſquialtera celeritatis ratione ſuperet Nonium. ut prorſus iiſdem rationibus inter ſe diſtent hi ad antipodas noſtros tendentes, quibus inter ſe diſtant, qui ad nos evadunt. Hæc ita ſignamus, $\frac{\text{Nonius}}{\text{Decius}}$ $\frac{\text{Nonius}}{\text{Sejus,}}$ $\frac{\text{Nonius}}{\text{Titius}}$ numeris autem ſic: $\frac{4}{4}.\frac{4}{6}.\frac{4}{9}.$ Conjunctim utraſque earundem rationum in diverſas partes progreſsiones, unâ nihili rationum omiſsâ, ſic exponimus: $\frac{9}{4}.\frac{6}{4}.\frac{4}{4}.\frac{4}{6}.\frac{4}{9}.$ Cum itaque ratio ſeſquialtera $\frac{6}{4}$ tanto ſpatio abſit à ratione nihili $\frac{4}{4}$, quanto ſpatio ab eadem nihili ratione $\frac{4}{4}$ abeſt ratio ſubſeſquialtera $\frac{4}{6}$; hæ duæ rationes, ſeſquialtera, & ſubſeſquialtera, inter ſe ſunt æquales; quamvis non ſint eædem. quod una tanto exceſſu nihili rationem ſuperet, quanto defectu altera à nihili ratione deficit: ſeu, quod una tanto ſpatio ad dextram diſtet, quanto altera ad ſiniſtram. Inter ſe autem hæ duæ rationes, ſeſquialtera & ſubſeſquialtera, diſtant ratione biſſeſquialterâ, ſeu duplaſuperquartâ. quod etiam ex additione fit evi-

dens. Si enim rationi ſubſeſquialteræ duplaſuperquarta addatur, inde componitur ratio ſeſquialtera; in his minimis terminis, 6. 9. 4. quippe ratio ſeſquialtera 6 ad 4, conſtat ex ratione ſubſeſquialtera, 6 ad 9, & ratione biſſeſquialtera, ſeu duplaſuperquartâ, 9 ad 4. Similiter ratio biſſeſquialtera, ſeu duplaſuperquarta $\frac{9}{4}$, major eſt quàm ratio ſubbiſſeſquialtera, ſeu ſubduplaſuperquarta, ratione quaterſeſquialterâ, ſeu ratione biſduplaſuperquartâ, hoc eſt, ratione quintuplaſuperſextadecimâ, $\frac{81}{16}$. Id quod ex additione quoque patet. Si enim rationi ſubbiſſeſquialteræ $\frac{4}{9}$, ſeu $\frac{36}{81}$, addatur ratio quaterſeſquialtera, $\frac{81}{16}$, inde conficitur ratio biſſeſquialtera, $\frac{36}{16}$, ſeu $\frac{9}{4}$, in his minimis terminis, 36. 81. 16. Plane uti, ſi quis quinquaginta deberet, deinde autem centum acciperet, ſoluto debito retineret quinquaginta. Si pro centum tantùm acciperet quinquaginta, ſoluto debito nihil retineret. Idem quoque reductione planum evadit. Reducantur enim propoſitæ rationes $\frac{9}{4}$. $\frac{6}{4}$. $\frac{4}{4}$. $\frac{4}{6}$. $\frac{4}{9}$. ad rationes alias: magnitudine quidem eaſdem; diverſas autem, quod omnes eundem habeant terminum conſequentem: nempe ad has, $\frac{81}{36}$. $\frac{54}{36}$. $\frac{36}{36}$. $\frac{24}{36}$. $\frac{16}{36}$. Ratio $\frac{81}{36}$ æqualis eſt rationi $\frac{9}{4}$. ratio $\frac{54}{36}$, rationi $\frac{6}{4}$. Sic æquales inter ſe ſunt & reliquæ, $\frac{36}{36}$ & $\frac{4}{4}$. $\frac{24}{36}$ & $\frac{4}{6}$. $\frac{16}{36}$ & $\frac{4}{9}$. Major autem eſt ratio $\frac{81}{36}$ quàm ratio $\frac{16}{36}$, ratione $\frac{81}{16}$. Nihil autem ad rem, quod hac reductione, præcedenti exemplo adcommodatâ, Lucius 81 milliaria conficiat, dum Titius, quem Lucio celeritate parem antea ſtatuebam, conficit tantum 16. Poni enim poſſunt hi duo, Lucius & Titius diverſæ celeritatis, ſed in hoc exemplo proportionaliter ab utroque abeſſe debent Mævius &

Sejus: ille milliaribus 54; hic 24. Ideoque Nonius ſeſquialtera celeritatis ratione ſuperat Sejum, & hic eadem ratione Titium; contrà atque priori ſuppoſitione ſe invicem ſuperabant: hoc modo, $\frac{\text{Lucius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Mævius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Nonius.}}{\text{Decius.}}$ $\frac{\text{Sejus.}}{\text{Nonius.}}$ $\frac{\text{Titius.}}{\text{Nonius.}}$ Porro idem eſt, ſi illæ rationes $\frac{9}{4}. \frac{6}{4}. \frac{4}{4}. \frac{4}{6}. \frac{4}{9}.$ reducantur ad alias æque magnas, ſed quæ communem habeant terminum antecedentem; quales ſunt, $\frac{36}{16}. \frac{36}{24}. \frac{36}{36}. \frac{36}{54}. \frac{36}{81}.$ $\frac{\text{Septimius.}}{\text{Lucius.}}$ $\frac{\text{Septimius.}}{\text{Mævius.}}$ $\frac{\text{Nonius.}}{\text{Decius.}}$ $\frac{\text{Nonius.}}{\text{Sejus.}}$ $\frac{\text{Nonius.}}{\text{Titius.}}$ Hæc alio exemplo ſum illuſtraturus. Supponantur enim quinque homines, Cajus, Lucius, Mævius, Nonius cum comite Decio, in centro A conſiſtentes, qui ad nos per radium AN evadere conentur. Illorum autem celeritatis hoc ſit diſcrimen, quod quo tempore Cajus ab A ad N venit, Lucius veniat ad K; Mævius ad I; Nonius cum comite Decio ad G: hoc eſt, cum Cajus emenſus eſt milliaria 12, Lucius confecit 9; Mævius, 8; Nonius, 6. Cajus itaque à Nonio maximo ſpatio abeſt; adeoque maximam celeritatis rationem Cajus habet ad Nonium. Sed idem Cajus, cum Mævio comparatus, minorem quidem celeritatis rationem conſtituit, quàm comparatus cum Nonio; majorem tamen quàm ſi comparetur idem Cajus cum Lucio. ob majorem minoremque binorum inter ſe diſtantiam. Maxima igitur celeritatis diſcrepantia eſt inter Cajum & Nonium; minor inter Cajum & Mævium; minima inter Cajum & Lucium; quia Nonii tarditas major eſt quàm Mævii; & Mævii major quàm Lucii. Quare cum Nonii celeritatem ſuperet binario Mævius; quod octo milliaria conficiat Mævius, dum Nonius ſex; horum celeritatis ratio eſt $\frac{8}{6}$ ſeu $\frac{4}{3}$. Similiter Lucii & Mævii celeritatis

ratio eſt $\frac{9}{8}$: ſed Lucii & Nonii, $\frac{9}{6}$ ſeu $\frac{3}{2}$. Caji & Lucii rurſus, $\frac{4}{3}$; Caji & Mævii, $\frac{3}{2}$; Caji & Nonii, $\frac{2}{1}$. Ergo Lucii & Nonii celeritatis ratio major eſt quàm ratio celeritatis Mævii & Nonii, ratione celeritatis Lucii & Mævii. hoc eſt, ratio $\frac{9}{6}$ major eſt quàm ratio $\frac{8}{6}$, ratione $\frac{9}{8}$. Item Caji & Mævii celeritatis ratio major eſt quàm Caji & Lucii, ratione celeritatis inter Lucium & Mævium: hoc eſt, ratio $\frac{12}{8}$ major eſt quàm ratio $\frac{12}{9}$, ratione $\frac{9}{8}$. Item Caji & Nonii celeritatis ratio major eſt quàm Lucii & Nonii celeritatis ratio, ratione celeritatis Caji & Lucii: id eſt, ratio $\frac{12}{6}$ ſuperat rationem $\frac{9}{6}$, ratione $\frac{12}{9}$. Et Caji & Nonii celeritatis ratio ſuperat celeritatis rationem inter Cajum & Lucium, ratione celeritatis inter Lucium & Nonium: hoc eſt, ratio $\frac{12}{6}$ ſuperat rationem $\frac{12}{9}$, ratione $\frac{9}{6}$. Quod ſi ab altera quoque parte quinque homines, per radium An adſcendentes, ponamus, eadem, quæ ſuprà tradita eſt, comparatio inter binos ac binos diverſarum partium inſtitui poteſt. Cæterum illarum rationum mediam, quæ ex æqualibus terminis conſtat; quam propterea æqualem veteres adpellarunt; nihili rationem vocat Euthymius: quemadmodum o, nota nulla, ſeu ſiphra, in abſolutis numeris nihilum ſignificat. Illas autem rationes, quæ ex inæqualibus terminis conſtant; quarum infinitus numerus eſt ab utraque parte nihili rationis; ita diſcriminat, ut quarum antecedens terminus major eſt termino conſequente, adeoque quæ nihili ratione ſunt majores, λόγυς ὑπερβολικὺς, Exceſsivas rationes, generali nomine adpellet; ſed quarum contrà antecedens terminus minor eſt termino conſequente, quæ ideo nihili ra-

tione ſunt minores, eas vocat *λόγȣς ἐλλειπτικȣ̀ς*, rationes Defectivas. quomodo ratio $\frac{9}{4}$ eſt exceſsiva; cujus defectiva eſt $\frac{4}{9}$. Poſſent quoque vocari *ἀναβαίνοντες*, adſcendentes; & *καταβαίνοντες*, deſcendentes. Item dativi ſeu poſitivi, & ablativi, ob diverſos reſpectus: prior tamen adpellatio, quod ex nominibus in Geometria uſitatis ſit derivata, magis placet. Antiquamus igitur veterum diſtinctionem rationum, quam ſuprà pag. 13 retuli, in rationes majores & minores. quas inepte recentiores, majoris & minoris inæqualitatis rationes vocant. Quod ſi propriis nominibus ſingulæ rationes adpellentur, defectivæ ſunt, quibus additur præpoſitio ſub; uti contrà exceſsivæ ſunt, quibus hæc particula non eſt præpoſita. Illa autem ſignificatione particulam ſub hîc retinemus, ut rationes, ſub nihili ratione collocatas denotet. Et hæc quidem ſunt principia doctrinæ Euthymianæ, quæ quamvis clariſsima ſint, aliis tamen exemplis declarare pergam. Sint quinque homines, Cajus, Lucius, Mævius, Sejus, Titius.

\+ —

8. 4. 0. 4. 8.

Etquidem Cajus in bonis habeat 8; Lucius, 4; Mævius, o, nihil; Sejus autem & Titius non tantum nihil habeant, ſed etiam nihilo minus; nempe Sejus 4 debeat, Titius 8. Ideoque quanto Caji divitiæ ſupra nihilum adſcendunt, tanto infra nihilum deſcendit paupertas Titii. qui ſi 4 lucraretur, & ſolveret, Seji paupertatem æquaret, qui tantùm 4 debet. Si ſecundùm 4 conſequeretur, adſcenderet ad felicitatem Mævii; qui ne obulum quidem poſsidet, ſed nec obulum debet. Si tertiùm 4 lucraretur, revera aliquid in bonis habere inciperet Titius, nempe 4. quibus Lucii

facultates cenſentur. Si quartùm acciperet 4, jam Caji divitias æquaret, qui 8 poſsidet. Ergo Caji divitiæ ſuperant paupertatem Titii, quem tanto ære alieno obrutum, nihil habere fingimus, numero 16. hoceſt, ſi Titius, qui 8 debet, lucretur 16, Caji divitias æquare dicetur. Sejo tantûm 12, Mævio 8, Lucio 4 deſunt, ut ad Caji divitias ſinguli adſcendant. Porro hac fictione, qua Titius, qui 8 debet, nihil habere conſideratur, Sejus, qui 4 debet, fingitur habere aliquid, nempe 4: & Mævius, qui nihil habet, duplo eſſe ditior Sejo. Similiter Lucius triplo plus habet quàm Sejus; & Cajus quadruplo. Hæc uti in abſolutis numeris indubitatæ ſunt veritatis, ita & in relatis ad alios, ſeu rationibus. Quod etiam in diverſarum ſpecierum miſtis oſtendam. Sint enim in diagrammate adpoſito quinque miſta ex vino & aqua, in ſeſquialtera ratione utrinque progredientia. Hoc primum conſtare debet, omnia horum miſtorum antecedentia liquida eſſe ejuſdem ſpeciei, nempe vinum; & quidem ejuſdem ſpeciei, ut Rhenanum. Similiter & omnia horum miſtorum conſequentia liquida eſſe ejuſdem ſpeciei, nempe aquam, forte fontanam. Si enim miſtum exceſſivum ſit $\frac{9^{v}}{4^{a}}$, & miſtum defectivum $\frac{4^{a}}{9^{v}}$, nulla inter hæc duo miſta eſt diverſitas; ſed unum idemque miſtum, vel majore, vel minore ejuſdem miſti & rationis termino præpoſito, denotatur. quod ut Geometricum hîc eſt obſervandum. Deinde, niſi vinum in omnibus miſtis ſit Rhenanum; ſed in hoc Rhenanum, in illo Gallicum, in ter-

	+	o	−	
9^{v}.	6^{v}.	4^{v}.	4^{v}.	4^{v}.
4^{a}.	4^{a}.	4^{a}.	6^{a}.	9^{a}.
81^{v}.	54^{v}.	36^{v}.	24^{v}.	16^{v}.
36^{a}.	36^{a}.	36^{a}.	36^{a}.	36^{a}.

tio Hiſpanicum, Phyſicè peccabitur. Porro horum miſtorum medium $\frac{4v}{4a}$ vocamus nihili miſtum; quod, cum ex ejuſdem quantitatis terminis conſtet, nempe ex 4 menſuris vini, & item ex 4 menſuris aquæ, id omni exceſsivo miſto debilius ſit, & omni defectivo fortius. Hoc nihili miſto ſeſquialteris viribus fortius eſt miſtum $\frac{6v}{4a}$; quia hujus miſti vinum, ſex menſurarum, ſeſquialtera ratione ſuperat vinum miſti nihili, 4 menſurarum. Cum autem primum miſtum ſit, quod hîc ſupra nihili miſtum, ſiphræ locum obtinens, adſcendat, unitatis loco id poſitum dicimus. Deinde, cum ſecundum exceſsivum miſtum $\frac{9v}{4a}$, eadem ratione, ſeſquialteris nempe viribus, ſuperet miſtum primum $\frac{6v}{4a}$, quibus hoc primum ſuperat nihili miſtum $\frac{4v}{4a}$; binarii loco hoc ſecundum exceſsivum miſtum poſitum dicemus. Binarius autem duplus eſt unitatis: ergo & miſtum $\frac{9v}{4a}$ duplum eſt miſti $\frac{6v}{4a}$, ſeſquialteræ rationis. Sic ulterius adſcendendo miſtum $\frac{27v}{8a}$ ternarii locum obtinet; & miſtum $\frac{81v}{16a}$ locum quaternarii: adeoque hoc miſtum $\frac{81v}{16a}$ eſt quadruplum miſti $\frac{6v}{4a}$ ſeu $\frac{24v}{16a}$, hoc eſt, ut 4 ad 1. idemque hoc miſtum $\frac{81v}{16a}$ eſt ſuperterium miſti $\frac{54v}{16a}$, hoc eſt, ut 4 ad 3; duplum autem miſti $\frac{36v}{16a}$, ſeu $\frac{9v}{4a}$. Rurſus miſtum $\frac{54v}{16a}$ eſt triplum miſti $\frac{24v}{16a}$; ſeſquialterum autem miſti $\frac{36v}{16a}$. Similiter de rationibus ab altera parte nihili rationis, in ſeſquialtera item ratione, progredientibus, ratiocinabimur. Quippe nihili miſto $\frac{4v}{4a}$, in ſeſquialtera ratione debilius eſt miſtum $\frac{4v}{6a}$; quia hujus miſti aqua, ſex menſurarum, ſeſquialtera ratione ſuperat aquam miſti nihili, 4 menſurarum. Cum autem hoc primum miſtum ſit, quod hîc à nihili miſto deficit,

defectivæ unitatis loco id poſitum dicimus. Sic binarii defectivi loco erit miſtum $\frac{4v}{9a}$. ternarii defectivi loco, miſtum $\frac{8v}{27a}$. quaternarii defectivi loco, miſtum $\frac{16v}{81a}$. eodemque, quo de exceſsivis, modo ulterius de his defectivis ratiocinabimur. Cæterum ponamus forte ſervos quinque, ratione ſervitutis, honeſtioris aut vilioris, quam eidem domino ſerviunt, bibere hæc quinque miſta: primus, fortiſsimum miſtum $\frac{9v}{4a}$; ultimus, debiliſsimum $\frac{4v}{9a}$. Fingat autem ultimus, cum debiliſsimum miſtum bibat, nempe $\frac{4v}{9a}$, ſe nihili miſtum bibere; ſed bibiturum aliquarum virium miſtum, ſi quando ad honeſtius miniſterium quarti, qui bibit miſtum $\frac{4v}{6a}$, quod in ſeſquialtera ratione fortius eſt miſto $\frac{4v}{9a}$, à domino promoveatur. Quare quarti ſervi miſtum $\frac{4v}{6a}$, unitatis loco ab hoc ultimo ſervo ponitur; tertii autem, qui bibit miſtum nihili $\frac{4v}{4a}$, loco binarii: ideoque miſtum $\frac{4v}{4a}$, ſecundum hanc fictionem duplum eſt miſti $\frac{4v}{6a}$, in ſeſquialtera progreſsione. Sic deinceps ternarii loco ipſi erit miſtum $\frac{6v}{4a}$, ſervi ſecundi; & quaternarii loco, miſtum $\frac{9v}{4a}$, ſervi primi. Quare primi ſervi miſtum $\frac{9v}{4a}$, hac fictione quadruplum eſt miſti $\frac{4v}{6a}$, ſervi quarti; duplum miſti $\frac{4v}{4a}$, ſervi tertii; ſupertertium miſti $\frac{6v}{4a}$, ſervi ſecundi. Et ſecundi ſervi miſtum $\frac{6v}{4a}$, ſeſquialterum eſt miſti $\frac{4v}{4a}$, ſervi tertii; triplum miſti $\frac{4v}{6a}$, ſervi quarti. Id quod clarius conſtat ex iiſdem his miſtis ad eandem aquæ quantitatem reductis, ut & in præcedenti diagrammate factum. Fortius autem eſt miſtum $\frac{81v}{36a}$ quàm miſtum $\frac{16v}{36a}$, in ratione quaterſeſquialtera, ſeu quintupla & ſuperoctogeſima, $\frac{81}{16}$; quamvis ratio $\frac{81}{36}$ tantùm ſit biſſeſquialtera. Plane uti paginâ 110, Caji divitiæ ſupera-

bant paupertatem Titii, numero 16; licet hujus dimidium tantùm poſsideret Cajus, nempe 8. Quod ſi revera, non autem fictione, nihil habuiſſet Titius, quater per quaternarium facultates augendo, perveniſſet non ad 8, ſed ad 16. Similiter, ſi revera ratio $\frac{16}{36}$ eſſet ratio nihili, non ad rationem $\frac{81}{36}$ veniretur, quater rationem ſeſquialteram rationi nihili addendo, ſed ad rationem $\frac{81}{16}$; uti in hac progreſsione mere exceſsiva conſpicitur, $\frac{81}{16}. \frac{54}{16}. \frac{36}{16}. \frac{24}{16}. \frac{16}{16}.$ Illud igitur ex his liquet, duobus modis rationes defectivas conſiderari poſſe: uno, genuino; cum à nihili ratione $\frac{4}{4}$ incipiendo, unitatis loco ponitur ratio $\frac{4}{6}$; loco binarii, ratio $\frac{4}{9}$; ternarii, $\frac{8}{27}$; quaternarii, $\frac{16}{81}$; & ſic deinceps: altero, fictitio; cum exceſsivas & defectivas conjunctim, mere exceſsivas fingimus; uti in præcedenti exemplo, nihili rationis loco ſtatuitur ratio $\frac{4}{9}$; loco unitatis, ratio $\frac{4}{6}$; binarii, $\frac{4}{4}$; ternarii, $\frac{6}{4}$; quaternarii, $\frac{9}{4}$. Porro & illud ex his cognoſcere promtum eſt, quid ſit rationum compoſitio, ſeu additio; &, quid rationum, alterius ab altera ablatio. Ratio rationi addita dicitur, cum vel unius rationis antecedens magnitudo, eſt alterius conſequens; vel, quod eodem recidit, unius rationis conſequens magnitudo eſt alterius antecedens; adeoque, cum tribus magnitudinibus duæ rationes comprehenduntur, quarum extremis ratio ex duabus illis compoſitis nata includitur. Quatuor autem modis additio perfici poteſt: plane uti in rebus ſimplicibus, alteram alteri aut ſuprà adpono, aut infrà; ſeu, vel ad dextram, vel ad ſiniſtram. Duas enim lineas $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ compoſiturus, ſi lineam $\frac{C}{D}$ addere velim lineæ $\frac{A}{B}$, aut ſuprà illam addo,

extremum D jungendo extremo A; aut infrà, extremum C componendo cum extremo B. Rurſus, ſi lineam $\frac{A}{B}$ jungere velim lineæ $\frac{C}{D}$, aut ſupra illam adpono, componendo extremum B cum extremo C; aut infrà, jungendo extremum A, extremo D. Hos quatuor rationes quoque componendi modos, perſpicuitatis cauſa ſequenti diagrammate incluſos, mihi tradidit.

				ut ad ita ad			
Rationes duas, $\frac{A}{B}$ ($\frac{6}{3}$) & $\frac{C}{D}$ ($\frac{12}{8}$) compoſiturus, aut	rationi $\frac{A}{B}$ ($\frac{6}{3}$) addo rationem $\frac{C}{D}$ ($\frac{12}{8}$) idque vel	ſuprà	faciendo,	D. C : A. E 8. 12 : 6. 9.	unde compoſita ratio eſt,	E 9 B· 3·	C E. 9 D A. 6 B. 3
		infrà		C. D : B. E. 12. 8 : 3. 2.		A 6 E· 2·	A 6 C B. 3 D E 2
	rationi $\frac{C}{D}$ ($\frac{12}{8}$) addo rationem $\frac{A}{B}$ ($\frac{6}{3}$) idque rurſus vel	ſuprà		B. A : C. E. 3. 6 : 12.24		E 24 D· 8·	A E. 24 B C. 12 D. 8
		infrà		A.B : D.E. 6. 3 : 8. 4		C 12 E· 4·	: C. 12 A D. 8 B E. 4

Ultimum componendi modum adhibuit in figura paginæ 98. ubi factum eſt, ut A ad B, ſeu RS ad ST; ita D ad E, ſeu VS ad SX. Ratio enim $\frac{C}{E}$ conſtat ex ratione $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$. Qua quidem rationes componendi methodo rerum natura nullam breviorem admittit, nullam concinniorem. Sic ſi ſcire expetam, quam celeritatis rationem efficiat paginâ 108, ratio celeritatis inter Mævium & Nonium, quæ ſupertertia eſt, juncta celeritatis rationi inter Lucium & Nonium, quæ eſt ſeſquialtera; invenio rationem celeritatis duplam, inter Cajum & Nonium: quippe ſeſquialteræ celeritatis rationi inter Lucium & Nonium, æqualis eſt ſeſqvialtera

celeritatis ratio inter Cajum & Mævium. adeoque ſupertertiæ rationi celeritatis inter Mævium & Nonium, addita eſt ſeſquialtera celeritatis ratio inter Cajum & Mævium, id eſt, inter Lucium & Nonium. nempe ratio $\frac{12}{6}$ compoſita eſt ex ratione $\frac{12}{8}$, & ratione $\frac{8}{6}$. Quod ſi altera ratio ex addendis exceſsiva ſit, altera defectiva, iiſdem modis compoſitio perficietur. Etenim rationes $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{4}$ additæ faciunt rationem $\frac{6}{4}$: rationes autem $\frac{1}{2}$ & $\frac{4}{3}$ compoſitæ faciunt rationem defectivam $\frac{4}{6}$. At rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{2}{3}$ additæ, exhibent rationem nihili $\frac{6}{6}$. uti in ſimplicibus numeris +3 & −3 additi, faciunt nihil: at +3 & −8, faciunt −5. Si enim, in orientem navigando tendens, per tria milliaria ſim progreſſus, totidem autem adverſi venti vehementiâ retroagar, nihili iter confeciſſe recte dicor: quod ſi, tria milliaria progreſſus, per octo milliaria retro agar, tantùm abeſt, ut vel nihili iter confecerim, ut ante quinque milliaria ſint emetienda. Ratio porro à ratione ablata dicitur, cum ad eandem magnitudinem conſequentem utrâque reductâ, ratio differentialis, quâ major minorem ſuperat, innotuit. Utraque autem ratio; tam ea, de qua demitur altera, quàm demenda; ſi vel hæc exceſsiva ſit, & illa defectiva, aut contrà; in eodem rationum ordine ac genere, aut exceſsivo, aut defectivo, conſiderantur. quod idem eſt, ac ſi rationem auferendam, ſi exceſsiva eſt, ponam ut defectivam; ſi defectiva, ut exceſsivam; & alteri deinde addam. Rationis igitur auferendæ magnitudinibus inverſis, hanc compono cum altera, à qua ablatio eſt facienda. Unde planum eſt, quatuor additionis modos,

ſupra deſcriptos, & in auferendo uſurpari poſſe. quos itidem, ut omnia clara eſſent, diagrammate expoſitos exhibuit.

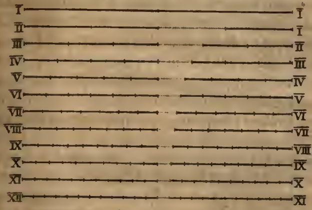
Rationem $\frac{C}{D}$ ($\frac{12}{8}$) à ratione $\frac{A}{B}$ ($\frac{6}{3}$) ablaturus, inverto magnitudines rationis auferendæ $\frac{C}{D}$ ($\frac{12}{8}$), ita ut antecedens C(12) fit conſequens; & conſequens D (8) fit antecedens, ſic $\frac{C}{D}$ ($\frac{8}{12}$). Deinde has duas rationes compono: & quidem aut

			ut ad ita ad			
rationi $\frac{A}{B}$ ($\frac{6}{3}$) addo rationem	ſuprà		D. C : A. E. 12. 8 : 6. 4.		E 4 B. 3.	C E. 4 D A. 6 B. 3
$\frac{C}{D}$ ($\frac{8}{12}$) idque vel	infrà	facien-	C. D : B. E. 8. 12 : 3. 4½.	unde compoſi-	A 12 E. 9.	A 12 C B. 6 D E 9
rationi $\frac{C}{D}$ ($\frac{8}{12}$) addo rationem	ſuprà	do,	B. A : C. E. 3. 6 : 8. 16.	ta ratio eſt,	E 16 D. 12.	A E 16 B C. 8 D 12
$\frac{A}{B}$ ($\frac{6}{3}$) idque rurſus vel	infrà		A. B : D. E. 6. 3 : 12. 6.		C 8 E. 6.	C. 8 A D. 12 B E. 6

Rationem autem $\frac{A}{B}$ ($\frac{6}{3}$) ablaturus à ratione $\frac{C}{D}$ ($\frac{12}{8}$), illas ita collocans $\frac{A}{B}$ ($\frac{3}{6}$) $\frac{C}{D}$ ($\frac{12}{8}$) compono: unde ſecundum quatuor illos modos differentia in ſequentibus numeris innoteſcit; $\frac{E}{B}\rangle\frac{9}{12}$. $\frac{A}{E}\rangle\frac{3}{4}$. $\frac{E}{D}\rangle\frac{6}{8}$. $\frac{C}{E}\rangle\frac{12}{16}$. Cum enim in ratione $\frac{3}{2}$ fueram progreſſus; per $\frac{1}{2}$, rationem majorem, regredior. In ſuperiori autem exemplo, ſi de ſeſquialtera celeritatis ratione Lucii ad Nonium, demam ſupertertiam celeritatis rationem Mævium ad Nonium, relinquitur ſuperoctava celeritatis ratio, ſpectata inter Lucium & Mævium; in his terminis, $\frac{9}{6}$. $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{8}$. Sic cum de ſubquadrupla demo ſubſupertertiam, relinquitur ſubtripla: at ſi de ſupertertia demere velim quadruplam, tantum abeſt ut hoc facere poſſim, ut ſupertertiæ tripla prius addita eſſe deberet. Progreſſus itaque per ſupertertiam regredior per ſubquadruplam; unde regreſſus ſuperat progreſſum ratione ſubtripla. Uti ſi de 4, quæ in bonis habeo, ſolvere velim 12, quæ debeo; cùm totum ſolvere ne-

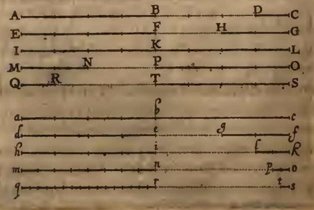
queam, minuo tamen debitum, uſque ad tertiam partem, ut ſolvenda tantum reſtent 8. Eucl. Plane nova Geometriæ elementa Euthymius condere videtur. ſed cum omnes iſtæ ratiocinationes ex male intellectis meis elementis natæ ſint, facile eas refutare poſſum. Archim. Utinam poſsis, ô Euclides. Jam quaſi per nebulam majus aliquod veritatis lumen conſpicio, quod ex tuis elementis quædam obſcuraturum videtur. Hermot. Clariſsimum, & nulla obſcuritatis nebula interceptum veritatis ſolem paulo poſt videbis. Sed prius, ſi patimini, alio modo eadem hæc Euthymii principia vobis ſum expoſiturus ; deinde ad ſingula, quæ contra hæc adferetis, reſpondebo. Rationis natura & eſſentia conſiſtit in duabus ejuſdem generis rebus, (quæ vel magnitudinibus tantùm exponuntur ; vel etiam, ſi commenſurabiles ſint magnitudines, numeris :) ſecundum certam magnitudinem ; vel etiam, ſecundum numerum, inter ſe comparatis. Quantitas autem rationis in duarum magnitudinum inter ſe diſtantia ſpectatur : quæ diſtantia cum infinitæ ſit aut parvitatis, aut magnitudinis ; hinc colligimus, quavis ratione infinite minorem, aut majorem, ſaltem potentiâ, dari poſſe. Porro nihili rationem, quæ in æqualibus magnitudinibus ſpectatur, rationem quidem eſſe ſtatuimus ; ſed nullius quantitatis ; quod nihili diſtantiâ magnitudines illius, antecedens & conſequens, inter ſe diſtent. Quæcunque autem alia, magna, parva, unitatis loco accipi poteſt. Cæterum duorum numerorum, naturali ſerie ſe proxime conſequentium, duo primi, 1 & 2, maximam

rationem comprehendunt : quæ ratio in creſcentibus numeris, proximis binis ac binis inter ſe comparatis, in infinitum decreſcit ; adeo ut duæ lineæ in infinitum, ſaltem potentiâ, ſibi invicem propriores fieri poſsint, & minus inter ſe ſpatium relinquere, nunquam tamen concurrere. Quod fieri poſſe multi, qui hæc penitus perſpecta non habent, negârint. In adjuncto igitur dia-



grammate clariſsime id expoſui. in quo poſt nihili rationem ; ſpectatam inter duas lineas, in medio concurrentes, dum una à dextra ſiniſtrorſum, altera à ſiniſtra dextrorſum æquabiliter progreditur ; primo loco eſt ratio dupla, inter numeros 2 & 1 : ſecundo loco, ratio ſeſquialtera, inter numeros 3 & 2 : tertio, ſupertertia, in numeris 4 & 3 : quarto, ſuperquarta, inter 5 & 4 : & ſic undecimo loco, ſuperundecima, in terminis 12 & 11. Centeſimo loco erit ſupercenteſima, in terminis 101 & 100 :

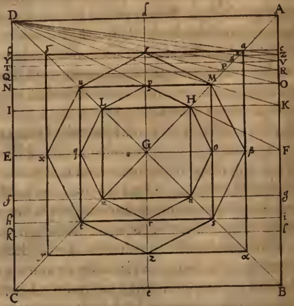
milleſimo, ſupermilleſima, inter 1001 & 1000. & ita progrediendo in infinitum. Omnium autem multiplarum minima primo loco eſt, nempe ratio dupla: at omnium ſuperparticularium maxima ſecundo loco, nimirum ſeſquialtera. Cæterum cùm omnis ratio unitatis loco conſiderari poſsit, ex ea bis compoſita, dupla efficitur primæ, ſeu ſimplæ; ex ter compoſita, ſimplæ tripla; ex vicies compoſita, ſimplæ vigecupla. Ter autem compoſita, ſeu tripla, ſeſquialtera eſt bis compoſitæ, ſeu duplæ: quater compoſita, ſeu quadrupla, ſupertertia eſt, ter compoſitæ, ſeu triplæ. Sic decies compoſita dupla ratio, $\frac{1024}{1}$, ſupernona eſt novies compoſitæ duplæ rationis, $\frac{512}{1}$. Quinquagies ſexies autem compoſita ratio ſuperoctogeſima, primo major eſt ſimpla ratione dupla. Quæ quidem compoſitio, quomodo fiat, ex altero hoc



diagrammate patet. in quo à ſiniſtro latere poſitæ ſunt antecedentes magnitudines, à dextro autem conſequentes.

Porro, in naturali ſitu, locomedio, poſita eſt ratio nihili, quam habet linea $\frac{I}{K}$ ad lineam $\frac{L}{K}$. ratio autem lineæ $\frac{L}{K}$, id eſt $\frac{E}{F}$, ad lineam $\frac{G}{H}$, eſt dupla. Primo igitur ſupra rationem nihili adſcenſu ventum eſt ad rationem, omnium multiplarum minimam; quavis autem ſuperparticularium majorem; cum per innumeras alias rationes, majores, minores, ſupra nihili rationem adſcenſus fieri potuiſſet. Porro linea $\frac{G}{H}$ dupla eſt lineæ $\frac{C}{D}$: adeoque linea $\frac{L}{K}$, hoc eſt $\frac{A}{B}$, quadrupla eſt lineæ $\frac{C}{D}$. Rurſus infra nihili rationem progrediendo, linea $\frac{M}{N}$ ſubdupla eſt lineæ $\frac{O}{P}$. Eſſentiâ autem ſuâ ſubdupla ratio æqualis eſt rationi duplæ; quia diſtantia magnitudinum utriuſque rationis eſt æqualis. quippe inter duplæ rationis magnitudines $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ tanta diſtantia eſt, quanta inter ſubduplæ rationis magnitudines $\frac{M}{N}$, $\frac{O}{P}$: at vero cum in diverſas partes hæ rationes tendant; dupla adſcendendo, deſcendendo ſubdupla; ratio dupla ſuperat rationem ſubduplam, ratione quadrupla. Porro $\frac{M}{N}$ dupla eſt ipſius $\frac{Q}{R}$: ergo $\frac{Q}{R}$ ipſius $\frac{S}{T}$, ſeu $\frac{L}{K}$, eſt ſubquadrupla. Superat autem ratio quadrupla rationem ſubquadruplam, ratione ſedecupla; hoc eſt, ſi rationi ſubquadrupla addatur bis quadrupla, id eſt, ſedecupla, inde conficietur ratio quadrupla, in his terminis 4. 16. 1. quod etiam reductione harum rationum ad eundem terminum conſequentem facta clareſcit, in his numeris: $\frac{16}{4}.\frac{8}{4}.\frac{4}{4}.\frac{2}{4}.\frac{1}{4}.$ Quod ſi ratio quadrupla vere eſſet ratio nihili, quater rationem duplam addendo, veniretur ad rationem ſedecuplam. $\frac{16}{1}.\frac{8}{1}.\frac{4}{1}.\frac{2}{1}.\frac{1}{1}.$ quod altero diagrammate expoſui, ubi $\frac{a}{b}$, ut ita dicam, nulla eſt ipſius $\frac{c}{b}$: at $\frac{c}{b}$, ſeu $\frac{d}{e}$, dupla eſt ipſius $\frac{f}{g}$. Deinceps $\frac{f}{g}$ dupla eſt ipſius $\frac{h}{i}$: ergo $\frac{c}{b}$,

hoc eſt, $\frac{h}{i}$ bis dupla, ſeu quadrupla eſt ipſius $\frac{k}{l}$. Rurſus $\frac{k}{i}$ dupla eſt ipſius $\frac{o}{p}$: ergo $\frac{c}{b}$, hoc eſt, $\frac{m}{n}$ terdupla, ſeu octupla, eſt ipſius $\frac{o}{p}$. Denique $\frac{o}{p}$ dupla eſt ipſius $\frac{r}{t}$: quare $\frac{c}{b}$, hoc eſt, $\frac{q}{t}$ quaterdupla eſt, ſeu ſedecupla, ipſius $\frac{r}{t}$. Atque hac methodo quævis rationes componi poſſunt, atque altera ab altera auferri. Alium inſuper has rationes conſiderandi modum addam; ex qua eadem veritas conſpiciatur.



Sit enim quadratum A B C D, in quo ductis diagoniis A C, B D; & biſectis lateribus per lineas E F, *ed*; ducatur ex angulo D, ad biſectionis punctum F, linea DF, quæ diagonium A C ſecat in puncto H. Si per hoc punctum H recta ducatur I K, lateri AB, aut B C,

parallela; etiam ab altera diagonio B D, eadem linea ſecatur in L: adeo ut in duobus iis punctis in tres æquales partes linea I K, id eſt AB, ſit diviſa. quod ad Ariſtidem Quintilianum ab Euthymio eſt demonſtratum. Quod ſi rurſus puncta D & K per lineam DK conjungantur, recta M O, ſeu O A, erit lineæ A B pars quarta: deinceps PR ſeu R A, ejuſdem lineæ eſt pars quinta; S V, ſeu V A, pars ſexta: & ſic in infinitum, potentiâ ſaltem, eandem operationem continuando, in quotcunque partes æquales propoſita linea Geometricè ſecabitur. Infra lineam $^{E}_{F}$ ſimiliter eadem ratione hæ ſectiones procedent. Linea enim $^{f}_{g}$ per duo puncta, m & n, in tres partes æquales ſecatur: linea autem $^{h}_{i}$ in partes quatuor, per tria puncta, t, r, s. & ſic deinceps lineæ cujuſvis, in eadem diſtantia infra mediam $^{E}_{F}$ ſitæ, in qua ſupra eandem $^{E}_{F}$ alia erat poſita, eaſdem partes nanciſcemur, in quas hæc erat diviſa. Ex iis autem ita ratiocinamur. Cum linea $^{E}_{F}$, hoc eſt $^{A}_{B}$, biſecta ſit in G; per quod punctum lineæ $^{A}_{B}$, vel $^{D}_{C}$, parallela ducta eſt $^{d}_{e}$; erit linea $^{E}_{G}$ ad lineam $^{F}_{G}$ in ratione nihili; utpote æquæ magnitudines inter ſe comparatæ. Cæterum antecedentes rationum, tam defectivarum, quam exceſsivarum, omnes ſiniſtro latere $^{D}_{C}$ & diagonio $^{A}_{C}$ concluſas hîc ſpectamus; & conſequentes, eadem diagonio $^{A}_{C}$ & dextro latere $^{A}_{B}$. ideoque ſectionum puncta, quæ exceſsivas rationes faciunt, in dimidia diagonio $^{A}_{G}$ exiſtunt; uti illa, quæ defectivas, in dimidia $^{G}_{C}$. Porro linea $^{I}_{K}$, in tres æquas partes ſecta, (quarum duæ $^{I}_{H}$, ſiniſtro latere $^{D}_{C}$, & diagonio $^{A}_{C}$ comprehenſæ, antecedentem faciunt; tertia autem $^{K}_{H}$, eadem

diagonio $\frac{A}{C}$, & dextro latere $\frac{A}{B}$ incluſa, conſequentem:) duplam rationem exhibet. quare punctum H, in dimidia diagonio $\frac{A}{G}$, dextram verſus ab æqualitate eſt remotum. Deinde ſectâ lineâ $\frac{N}{O}$ in quatuor æquales partes, illarum tres $\frac{N}{M}$, tanquam antecedens, ad unam $\frac{M}{O}$, ut conſequentem, triplam rationem efficiunt. Sectionis autem punctum M, magis receſsit ab æqualitate, hoc eſt, à lineæ $\frac{d}{e}$ puncto p, quam punctum H ab eadem linea $\frac{d}{e}$, eandem verſus partem, fuerat remotum. Major igitur harum partium $\frac{N}{M}$, $\frac{O}{M}$, inter ſe ratio eſt, nempe tripla; quam erat partium $\frac{I}{H}$, $\frac{K}{H}$, nempe dupla. Poſtea $\frac{Q}{P}$ quadrupla eſt ipſius $\frac{R}{P}$. & ſic altius adſcendendo. Cum autem ſeſquialtera ratio minor ſit ratione dupla, punctum ſectionis propius à linea $\frac{d}{e}$ aberit, quam inde abeſt punctum H. quod in linea $\frac{Q}{R}$, in quinque partes per quatuor diagonios tributâ, eſt manifeſtum. Omnes autem in univerſum ſuperparticulares rationes intra ſpatium F E I K includuntur; uti omnes multiplæ rationes duplo majore ſpatio, A D I K, ſunt comprehenſæ. Itaque uti in infinitum, potentiâ, altius à dupla ratione, lineam $\frac{A}{D}$ verſus, adſcenditur; ſic in infinitum propius ac propius ad lineam $\frac{E}{F}$, hoc eſt, ad nihili rationem, venietur, eandum lineam $\frac{A}{B}$ ſecundum rationes ſuperparticulares ſecando. Ab altera autem parte, ſeu infra lineam $\frac{E}{F}$, eædem plane ſectionum rationes ſpectantur in dimidia diagonio $\frac{G}{C}$, ſiniſtram verſus à linea $\frac{d}{e}$ remotæ. Quare linea $\frac{f}{g}$ tanto ſpatio infra lineam $\frac{E}{F}$ deſcendit, quanto ſupra eandem adſcendit linea $\frac{I}{K}$; eademque ratione, qua hæc, per diagonium $\frac{A}{C}$ eſt diviſa. quod ſimiliter de cæteris

monſtrabitur. Hoc autem ſchemate adumbrare utcunque poſſum, longitudinis dierum ac noctium varietatem ac viciſsitudinem, quam populi, qui citra aut ultra æquatorem habitant, experiuntur; licèt omnes, diei ac noctis ſimul, 24 horas numerent. Si enim Æquator fingatur $^{E}_{F}$, in duas æquas partes tributus: quarum $^{E}_{G}$, quæ à ſiniſtra eſt, diem denotet; altera $^{F}_{G}$, quæ à dextra, noctem; ſub illo habitantes diei longitudinem ad longitudinem noctis ſemper habent in ratione nihili: quod utraque duodecim horarum exiſtat. Porro $^{I}_{H}$, polum boréum verſus, diem 16 horarum notet; & $^{K}_{H}$, horarum 8 noctem. Eodem autem tempore, quo nos 16 horarum diem, & 8 noctem habemus, contrà antoeci noſtri, qui ſub parallelo $^{f}_{g}$ habitant, 8 horarum diem, in linea $^{f}_{m}$, & 16 horarum noctem, in linea $^{g}_{m}$, obſervant. Nos itaque quadruplo tum temporis antoecis noſtris ſumus feliciores. quippe duplo plus gaudemus, ob duplam diei longitudinem; & duplo minus triſtamur, ob duplam noctis brevitatem. Quod quidem illuſtriſsimum exceſsivarum ſimul & defectivarum rationum exemplum, omnibus populis, qui clariſsimo mundi lumini venienti gratulantur, & abeunti lætum reditum precantur, Deus obſervandum propoſuit. Atque ex his principiis omnia Euthymii dogmata, tàm quæ veſtra, illuſtres Geometræ, principia convellunt, & falſitatis convincunt, quàm quæ recentiorum hallucinationes oſtendunt, deducuntur. Illud, enim inquiebat Euthymius, ex his manifeſtum eſt, rationis Geometricæ naturam & eſſentiam in magnitudinum, quæ rationem conſtituunt, inter ſe diſtantia

(quod in Arithmetica ratione omnes admittunt) generaliter eſſe conſtitutam : uti abſolutorum numerorum eſſentia in diſtantia à nihilo ſpectatur. Quod non ſuppoſuiſſe hîc videri debeo, ſed ex rerum natura, tot exemplis fœcundâ, demonſtraſſe. Ex parte autem hoc principium Euclides admiſit, nempe in rationibus exceſsivis: ſed generaliter, in omnibus rationibus, etiam defectivis, hujus dogmatis veritatem primus oſtendo. Falſa igitur eſt octava propoſitio libri quinti Elementorum Euclidis, & decima ; quas pag. 32, & 36 retuli ; & multæ aliæ, quæ ab his pendent. Falſa ergo eſt, uti poſtea amplius oſtendam, libri quinti definitio ſeptima ; quam pagina 30. & 4. retuli : quâ, tanquam baſi, octava illa propoſitio nititur. Multæ autem propoſitiones veterum, quamvis falſæ non ſint, male tamen ex his elementaribus demonſtratæ probantur. Male enim Euclides, hac octavâ quinti uſus, demonſtravit ejuſdem libri propoſitiones XIV. XX. XXI. Male quoque divinus Archimedes ex eadem demonſtravit ſecundam propoſitionem libri primi de Sphæra & Cylindro ; quam pagina 37 adduxi. ad quam Eutocius commentando multas erroneas propoſitiones, ex octava quinti deductas, protulit ; quas ante ipſum Pappus produxerat Mathematicorum Collectaneorum libro VII : ex quo deſumtas libri quinti elementorum fini juniores illas adtexuerunt. Ex illa quoque octava quinti propullulavit inſignis illa paralogiſmorum ſeries, in ſecunda demonſtratione VIII propoſitionis libri II de Sphæra & Cylindro, quæ à paginæ 48 verſu 23, his verbis incipit : δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ.

Monſtrandum igitur, quadratum à C H in H F minus eſſe rectangulo à BHC in HG. quod idem eſt ac monſtrare, quadratum à CH, ad rectangulum à BHC, minorem rationem habere, quàm rectam G H ad H F. Nempe 16 ad 24 minorem habere rationem quàm habeat $10\frac{1}{2}$ ad $15\frac{1}{2}$, ſeu 21 ad 31: cum contrà ſtatuendum ſit, 16 ad 24 majorem habere rationem quàm habeat 21 ad 31. Quoniam enim eſt, ut 16 ad 24, ita 21 ad $31\frac{1}{2}$, major eſt diſtantia inter 21 & $31\frac{1}{2}$, hoc eſt, 16 & 24, quam inter 21 & 31. Nulla autem ex omni antiquitate Mathematica illuſtrior propoſitio proferri poteſt, quàm hæc ſit octava Archimedis; in qua toties dicatur, quæ ratio major ſit, quæ minor; quæ alterius dupla, quæ ſeſquialtera. in quo cum Theone juniores omnes, & in primis Gregorius à S.^to^ Vincentio, tam amplè errarunt. Ideoque Eutocii commentarium, quo fuſiſsimè hæc propoſitio, & Euclidéa doctrina, id eſt, libri quinti propoſitiones, VIII & X enarrantur, totum proferendum putavi, ut, quid veteres hîc docuerint, clare omnibus conſtaret. Ita autem hæc cohærent, ut omnes juniorum errores, non perſpectis veterum erroribus, ſolide dijudicari nequeant. Quare, inquiebat Euthymius, cum is præcipuus hujus narrationis mihi ſcopus ſit, ut totam antiquitatem ignoratæ in quibuſdam elementis Geometriæ convincam; deinde autem juniorum pravas explicationes, & monſtroſas hallucinationes demonſtrem; antiquis hunc honorem habebo, ut primi, demonſtrationum viribus adacti, veritati, omnium rerum antiquiſsimæ, victoriam concedere cogantur.

Agite ergo, ô præclari mathematici, & omnes ingenii nervos contendite, ut & acutè omnia, quæ porro relaturus ſum, inſpiciatis; & alacriter veſtra, rationibus adductis, defendatis. Falſam dixi quinti libri propoſitionem octavam. Quod ſi illa, quæ in principiis paulo ante expoſui, bene vobis perpenſa eſſent, falſitatis quoque cauſas perſpectas haberetis. Duobus autem modis illius falſitatem oſtendam. Primo, falſa Euclidis principia demonſtrando: Altero, vera Euthymii principia confirmando. Antiquorum omnium, adeoque ſummorum virorum, ſententiam, quæ undecunque auctoritatis plurimum ac roboris habet, primo loco, inquiebat Euthymius, propterea ponam, ne quod præjudicium, novam initio adſtruendo, aut veritati, aut tibi, aut etiam utrique, adferatur. Tres autem hujus propoſitionis caſus eſſe poſſunt. Vel enim tertia D, utravis reliquarum, $\frac{A}{B}$, C, minor eſt; vel major: vel majore, $\frac{A}{B}$, minor; minore autem, C, major. Primo caſu primum hujus propoſitionis membrum, quod paginâ 32 relatum eſt his verbis; *Inæqualium magnitudinum major, ad eandem, majorem rationem habet quàm minor;* Euthymius verum pronunciat: falſum autem membrum ſecundum, revertendo adverſam priori ſententiam proferens; quod ibidem his verbis conceptum adtulimus; *& eadem, ad minorem, majorem rationem habet quàm ad majorem.* Atque hujus primi caſus illud exemplum ponemus, quod Græci codices, editus & manu ſcripti, adferunt: quod & Commandinus retinuit, Græci codicis religioſus interpres; quem ſine cauſa hîc deſeruit Clavius, dum ter-

tiam D, ſecunda C, poſuit majorem, propoſitionum XIV. XX. XXI. ejuſdem libri demonſtrationes, ut puto, ſecutus. Verum igitur eſt primum membrum, nempe $\overset{A}{B}$ ad D, ſeu 7 ad 4, majorem rationem habere, quàm C ad D, ſeu 5 ad 4: at falſum, membrum ſecundum, nempe D ad C, ſeu 4 ad 5, majorem rationem habere, quàm D ad $\overset{A}{B}$, ſeu 4 ad 7. Secundo caſu primum membrum falſum eſt; verum autem ſecundum. Falſum enim eſt, 4 ad 6 majorem rationem habere, quàm 3 ad 6; ſed verum, 6 ad 3 majorem rationem habere quàm 6 ad 4. Tertio caſu falſum eſt utrumque membrum. quippe & hoc falſum eſt, 4 ad 3 majorem habere rationem, quàm 2 ad 3; & iſtud, 3 ad 2 majorem habere rationem, quàm 3 ad 4; quod diverſi generis rationes, exceſsiva & defectiva, inter ſe comparari nequeant. Quare ex tribus hujus propoſitionis caſibus, unus verus eſt, reliqui duo falſi; ut ſtatim demonſtrabimus. EUCL. Si quæ unquam ineptiæ, & olim, cum inter mortales degerem, & ex quo hac beatâ quiete mihi frui licuit, fando ad aures meas pervenére, inter illas certe has Euthymii tui, ô Hermotime, primo loco cenſere poſſum. Ut enim illud nunc prætaream, inconcuſſo fundamento, ſeptimâ nimirum ejuſdem libri definitione, niti hanc noſtram propoſitionem, faciliori adhuc viâ eandem veritatem hic demonſtratam dabo. Sint enim eædem lineæ, iidem numeri, quos tu anteproferebas. Dico (numeros ſolos adcommodans, ut brevius me expediam,) non tantùm 7 ad 4 majorem rationem habere quàm 5 ad 4; quod etiam conceſsit

Euthymius; ſed & revertendo; quod ejuſdem propoſitionis ſecundo membro volo; 4 ad 5 majorem rationem habere quàm 4 ad 7. Quis enim mortalium, exceptis Euthymio & Hermotimo, dubitat, vel unquam dubitavit, aut venientibus ſeculis dubitaturus eſt, quin, uti verum eſt, ſeptem partes quartas majores eſſe quinque partibus quartis, ſic immotæ veritatis ſit, quatuor partes quintas majores eſſe quàm quatuor partes ſeptimas. Theo. Sic optimè, ô Euclide. hoc quoque, in recenſendis tuis elementis, hujus propoſitionis principium ſum ſecutus. Pap. Ego quoque in tot inſignium mathematicorum propoſitionibus colligendis; & tuis, ô Apolloni, lemmatis demonſtrandis. Apol. Certe & ipſe hujus propoſitionis veritatem ab illo fundamento arceſſendam putavi. Eutoc. Nemo mathematicus ab alio cenſeret. Archim. Fateor & me hac ſententiâ olim fuiſſe imbutum; ſed ex iis, quæ principiorum loco ante retulit Hermotimus, jam aliter video hæc eſſe concipienda. Hermot. Te unum, tanto ingenio mathematicum, tanta ſolertia mechanicum, his Euthymii dogmatis adſenſum præbere, ô Archimede, hoc vero eſt quod me confidentiorem reddit. recenſendo pergens faciam, ſpero, ut & tu in hac ſententia, quam adeo feliciter concepiſti, confirmeris, & cæteri deinde unanimi conſenſu tibi accedant. Euthymius itaque, cum mentem ſæpius in id intendiſſet, ut in rerum natura principium, quo fiſi veteres hoc adſeruiſſent, indagaret, nullum aliud reperire potuit, quàm quod jam ab Euclide propoſitum eſt, & cæterorum calculo confirmatum;

nempe minutias inſpexiſſe Arithmeticas Eudoxum, Euclidem, & quotquot veterum aut hos præceſsiſſent, aut, octavam uſurpando, eſſent ſecuti. Nam & in minutiis, uno integro majoribus, quarum termini exceſsivas rationes conſtituunt, manifeſtam vidére veritatem; & in minutiis, uno integro minoribus, quarum termini rationes defectivas faciunt, certitudinem non minus, ut putarunt, evidentem. Cum igitur minutia $\frac{7}{4}$ major ſit quàm minutia $\frac{5}{4}$; quod numerus 7 majori ſpatio à nihilo diſtet quàm numerus 5: contrà autem minutia $\frac{4}{5}$ major ſit quàm minutia $\frac{4}{7}$; quod cum utraque æque multas habeat partes, illa majores habeat, hæc minores; nempe illa quintas, hæc ſeptimas: hinc adeo 7 ad 4 majorem rationem habere concluſerunt, quâm 5 ad 4; at contrà, 4 ad 5 majorem habere rationem quàm 4 ad 7. Similiter de aliis minutiis argumentando, cum facile caperent, minutiam $\frac{4}{6}$ majorem eſſe minutiâ $\frac{3}{6}$; contrà autem minutiam $\frac{6}{3}$ majorem eſſe minutiâ $\frac{6}{4}$: definivére, 4 ad 6 majorem rationem habere quàm 3 ad 6; ſed revertendo, majorem eſſe rationem $\frac{6}{3}$ ratione $\frac{6}{4}$. Sic minutiam $\frac{4}{3}$ majorem cum perſpicerent minutiâ $\frac{2}{3}$; contrà autem, minutiam $\frac{3}{2}$ majorem minutiâ $\frac{3}{4}$: ſtatuebant 4 ad 3 majorem rationem habere quâm 2 ad 3; ſed revertendo, 3 ad 2 in majori ratione eſſe quàm 3 ad 4. Cùm igitur in omnibus tribus caſibus iſtud verum, ex minutiis Arithmeticis, ſe deprehendiſſe putarent, generalem inde propoſitionem, hanc octavam, fabricarunt, & ex alio falſo principio, ex ſeptima nempe ejuſdem libri definitione, demonſtrarunt. Hæc autem ut clarius

inſpiciantur, accurate hîc exponam, in quibus minutiæ cum rationibus paria faciant; & in quibus inter ſe diſcrepent. Nam & Geometricæ conſiderationis ſunt minutiæ, quatenus ex duobus terminis, uti rationes, conſtant; qui quocunque numero multiplicati, eandem minutiam, eandemque rationem exhibent. quippe ut ratio $\frac{3}{2}$ eadem eſt quæ ratio $\frac{6}{4}$, vel $\frac{9}{6}$; ſic minutia $\frac{3}{2}$ tanta eſt, quanta minutia $\frac{6}{4}$, vel $\frac{9}{6}$, vel $\frac{72}{48}$. Unde & hoc planum eſt, minutiæ quantitatem; quatenus aliâ minutiâ ejuſdem generis, aut exceſsivi aut defectivi, major eſt, aut minor, aut illi æqualis; æque ac rationis quantitatem, qua aliâ ratione ejuſdem generis, aut exceſsivi aut defectivi, major eſt, aut minor, aut illi æqualis; ex eodem principio eſſe definiendam, ex majore nimirum, aut minore, aut etiam æquali terminorum inter ſe diſtantia, ſi utraque comparatarum aut rationum, aut minutiarum, ejuſdem generis exiſtens, aut exceſsivi, aut defectivi, ad eundem prius vel antecedentem, vel conſequentem fuerit reducta. Quod ſi una comparatarum rationum, aut minutiarum, exceſsiva ſit, altera defectiva; in principiis ſupra monſtratum eſt, & poſtea amplius monſtrabitur, illam in ſuo genere majorem eſſe, quæ longius à nihili ratione, aut minutia, diſtat: adeoque duas rationes, aut minutias, iiſdem terminis comprehenſas, hoc eſt, exceſsivam & cognominem defectivam, tanquam æque à nihili ratione, ſed in diverſas partes, diſtantes, æquales exiſtere; minutias quidem, quatenus Geometricè earum termini conſiderantur. quomodo ratio exceſsiva $\frac{2}{1}$ æqualis eſt cognomini defectivæ $\frac{1}{2}$.

Item exceſsiva $\frac{3}{2}$, cognomini defectivæ $\frac{2}{3}$. & exceſsiva $\frac{7}{4}$ æqualis cognomini defectivæ $\frac{4}{7}$. Rurſus in eo rationes & minutiæ inter ſe diſcrepant, quod rationis duo termini unam duntaxat notionem ingerant, ſpatium nempe inter utrumque terminum interjectum, quod plurium, aut pauciorum minorum rationum capax eſt, prout major, minorve ratio fuerit. Minutiæ autem duo termini duas notiones includunt; numeratoris à denominatore diſtantiam, & partium denominatoris numerationem. Quamobrem ſecundum Geometriam ratio $\frac{6}{4}$ æqualis eſt duabus rationibus $\frac{6}{5}$ & $\frac{5}{4}$: at minutia $\frac{6}{4}$, ſecundum Arithmeticam, æqualis eſt duabus minutiis $\frac{5}{4}$ & $\frac{1}{4}$, quæ, quòd eundem denominatorem ſortitæ ſunt, eam inter ſe rationem habent, quam numeratores, nempe quintuplam. Atque hinc quoque eſt, quòd omnes minutiæ inter ſe ſint commenſurabiles; cum contra diverſi fundi rationes, nullam communem menſuram admittant, ideoque nec rationem inter ſe habeant effabilem. Unde porro liquet, rationum ac minutiarum diverſam eſſe additionem, & conſequenter ſubtractionem. Præterea minutias, ob denominatoris illam numerationem, per numeros multiplicari poſſe, ac dividi; rationes verò nequaquam. Cum igitur duæ ſint minutiarum conſiderationes, Geometrica & Arithmetica; ex priore, ſed à veteribus non animadverſa, veram proferimus propoſitionem octavam; cum ex poſteriore antiqui effinxerint falſam. Verum enim eſt, Geometricè conſideratis minutiarum terminis, ſecundum diſtantiam antecedentis, ſeu numeratoris, à conſequente, ſeu

denominatore, qui ſemper integrum denotat, 7 ſupra 4, tanquam integrum, tanto ſpatio Geometrico adſcendere, quanto ſpatio 4 infra 7, tanquam integrum deſcendit. Ambæ enim rationes, $\frac{7}{4}$ & $\frac{4}{7}$, quæ æqualibus terminis fundanis comprehenduntur, à nihili ratione, in diverſas partes, æquidiſtant; nempe per rationem $\frac{7}{4}$, quæ nihili rationi $\frac{4}{4}$ addita, exceſsivam $\frac{7}{4}$ efficit; & ab eodem nihili ratione $\frac{4}{4}$ ablata, defectivam $\frac{4}{7}$. quod ex iiſdem rationibus, ad eundem conſequentem reductis, ſic adparet: $\frac{49}{28}.\ \frac{28}{28}.\ \frac{16}{28}.$ Quare 7 ad 4 eandem rationem habet quam 4 ad 7: rurſus 5 ad 4 eandem rationem habet quam 4 ad 5: quod exceſsiva ratio $\frac{7}{4}$, ſeu $\frac{49}{28}$, æqualis ſit cognomini defectivæ $\frac{4}{7}$, ſeu $\frac{16}{28}$: & ratio exceſsiva $\frac{5}{4}$, ſeu $\frac{25}{20}$, æqualis cognomini defectivæ $\frac{4}{5}$, ſeu $\frac{16}{20}$. Ideoque, ſi ratio $\frac{7}{4}$ major eſt ratione $\frac{5}{4}$; ſeu, quod idem eſt, ſi ratio $\frac{5}{4}$ minor eſt ratione $\frac{7}{4}$; etiam revertendo, ratio $\frac{4}{5}$ minor eſt ratione $\frac{4}{7}$. Quod octavæ propoſitioni Euclidis adverſatur. qui ex Arithmetica minutiarum conſideratione, quatenus partes integri numerantur, falſum iſtud theorema fabricavit; nempe rationem $\frac{7}{4}$ majorem quidem eſſe ratione $\frac{5}{4}$; at contrà rationem $\frac{4}{5}$ majorem eſſe ratione $\frac{4}{7}$, ob cauſam Arithmeticam ante relatam. Ex priore igitur minutiarum vera conſideratione, nempe Geometrica, quà ex numeratoris à denominatore diſtantia, quantitas ipſarum, æque ac rationum, definitur, octava propoſitio fuiſſet effingenda; non autem ex poſteriore minutiarum conſideratione, nempe Arithmetica, falſitas in Geometriam invehenda, propoſitionem Geometricam ex principio Arithmetico fabricando.

Quare novum illud Euthymii theorema, non minus in Arithmetica locum habebit, quàm in Geometria. Etenim ſcite hîc contemplabimur, minutiam exceſsivam tantâ ratione ſuperare minutiam nihili, ſeu integram, quantâ ratione eadem hæc minutia nihili ſuperat exceſsivæ cognominem defectivam. Tres enim partes minutiæ exceſsivæ $\frac{3}{2}$ ſuperant duas partes minutiæ integræ, ratione ſeſquialtera, ſeu ſuperdimidia: tres autem partes minutiæ integræ ſuperant duas partes minutiæ defectivæ, ratione item ſeſquialtera. Unde minutia exceſsiva $\frac{3}{2}$ ſuperat minutiam defectivam $\frac{2}{3}$, ratione biſſeſquialtera, ſeu dupla & ſuperoctava, in his terminis: $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{3}$. $\frac{2}{3}$. ſeu $\frac{9}{6}$. $\frac{6}{6}$. $\frac{4}{6}$. ſeu, $\frac{72}{48}$. $\frac{48}{48}$. $\frac{32}{48}$. quippe tres dimidii imperiales nummi, ſeu 72 ſolidi Lubecenſes, ſuperant ſui tertia parte integrum imperialem, ſeu 48 ſolidos, uti integer imperialis, ſeu 48 ſolidi, ſui tertia parte ſuperant duos imperialis trientes, ſeu ſolidos 32. Similiter minutia exceſsiva $\frac{4}{3}$ quanto ſpatio ſuperat minutiam nihili, tanto ſpatio minutia nihili ſuperat cognominem defectivam $\frac{3}{4}$: adeoque exceſsiva $\frac{4}{3}$ ſuperat defectivam $\frac{3}{4}$ ratione dupla minus ſuperoctava, in his terminis, $\frac{16}{12}$. $\frac{12}{12}$. $\frac{9}{12}$. ſeu, in imperialis minutiis, $\frac{64}{48}$. $\frac{48}{48}$. $\frac{36}{48}$. Porro uti major eſt minutia exceſsiva $\frac{3}{2}$ ſeu $\frac{72}{48}$, quàm minutia exceſsiva $\frac{4}{3}$, ſeu $\frac{64}{48}$, ob majorem minoremque numeratorum 72 & 64, ſupra integrum 48 adſcenſum; ſic major eſt minutia defectiva $\frac{2}{3}$, ſeu $\frac{32}{48}$, quàm minutia defectiva $\frac{3}{4}$, ſeu $\frac{36}{48}$. hoc eſt, minutia $\frac{32}{48}$ majus minus eſt quàm minutia $\frac{36}{48}$, quia hæc $\frac{36}{48}$ minus diſtat ab integro $\frac{48}{48}$, quàm illa $\frac{32}{48}$. Ex quibus omnibus planum eſt, ſi duæ defectivæ, vel rationes,

vel minutiæ, inter ſe ſecundum quantitatem comparentur, eandem hanc eſſe comparationem, quæ inter illas cognomines duas exceſsivas. Cæterum omnes hæc ratiocinatio, quâ Euclidéi theorematis falſitatem demonſtramus, paucis verbis includi poteſt. Quoniam enim ratio $\frac{7}{4}$ major eſt quàm ratio $\frac{5}{4}$, quod in iſta 7 ſupra 4 majori ſpatio adſcendat quàm 5 ſupra eundem 4; idcirco & ratio $\frac{4}{7}$ major eſt quàm ratio $\frac{4}{5}$, quod 4 infra 7 magis deſcendat quàm infra 5. Nunc ad alterum veniemus Euclidéæ demonſtrationis fundamentum, cui, ut firmiſsimo, hanc propoſitionem ſuperſtruendam cenſuit; nempe ad definitionem quinti libri ſeptimam, quæ paginâ 30. v. 4 eſt relata, & à Scholiaſte explicata paginâ 28, ad ejuſdem libri definitionem quintam. Hanc verò definitionem Euclidis diagrammati, quod paginâ 32 poſitum eſt, & paulo ante in numeris adductum, adcommodabimus. Sunt autem in omni caſu octavæ propoſitionis, potentiâ quatuor magnitudines; quandoquidem duæ rationes inter ſe ſecundum quantitatem ipſarum comparantur. quod & recte monitum à Scholiaſte pagina 35. v. 30. Cæterum in numeris iſtis primus terminus eſt 7. ſecundus, 4. tertius, 5. quartus iterum 4. Si jam ſumamus primi & tertii æque multiplos, in adducto diagrammate, triplos, 21 & 15: rurſus ſecundi & quarti æque multiplos, hîc quadruplos, 16 & 16: videmus primi multiplum, 21, ſuperare multiplum ſecundi, 16; at tertii multiplum, 15, non ſuperare multiplum quarti, 16. Ex qua veriſsima concluſione Euclides falſiſsimam, uti Euthymius cenſet, deduxit, nempe hanc

ob cauſam primum terminum 7, ad ſecundum 4, majorem rationem habere quàm tertium terminum 5, ad quartum 4. EUCL. Hoc certe immotum octavæ propoſitionis fundamentum ſtatuo, quod non niſi cum omnium tuorum principiorum ruina movebis. Videamus verò quam demonſtrationem contrà adferre poſsis. HERMOT. Qui præcedentis probationis falſitatem, inquiebat Euthymius, perſpexit, jam hujus definitionis fallaciam ex principio demonſtratam habet. Attamen ut majori certitudine omnia clareſcant, novum adhuc quoddam noſtrum de rationibus Geometricis inventum tibi non invidebo, ex quo; ſi quid tamen certi à mortalibus comprehenditur; evidentiſsimam doctrinam de rationum magnitudinibus explorandis hauries. Cum igitur ratio nihili ſit rationum omnium, exceſsivarum & defectivarum, fundamentum & principium; uti ſiphra, ſeu numerus nullus, quem ita ſignamus, o, principium eſt omnium numerorum abſolutorum, exceſsivorum & defectivorum; ſi rationis nihili antecedentem terminum multiplicem, exempli gratiâ, per 4, addo rationi nihili rationem quadruplam; adeo ut ratio ex ratione nihili, & additâ ratione quadruplâ compoſita, ſit ratio quadrupla, in his terminis, 4. 1. 1. Sin conſequentem nihili rationis terminum multiplicem per eundem numerum 4, aufero à nihili ratione rationem quadruplam; adeo ut ratio ex nihili ratione, & ablatâ ratione quadruplâ compoſita, ſit ſubquadrupla. Diſtant igitur æquali ſpatio à ratione nihili, ratio quadrupla, & ratio ſubquadrupla; ſeu exceſsiva quadrupla,

& cognominis defectiva; in diverſas tamen partes. Plane uti, ſi nihilo addam 4, & à nihilo 4 auferam, uterque numerus æque à nihilo diſtat, ſed in partes diverſas. Similiter ſi vel in orientem ab urbe quatuor milliarium iter faciam, vel quatuor milliarium iter in occidentem, æquali itinere, utrovis loco conſiſtendo, ab urbe abſum. Præterea tanto ſpatio ad dextram ab aliquo diſtare poſſum, quanto alius ad ſiniſtram. Aufero autem noſtri reſpectu, qui exceſsivas illas rationes facimus, quarum antecedentes conſequentibus ſunt majores: adderem autem illorum reſpectu, qui à nihili ratione nobis quidem deficiunt, ſibi autem contrà majore item antecedentis & conſequentis diſtantia, excreſcunt, & majores fiunt. Certiſsimis his, ex ipſa rerum natura petitis principiis, omnis noſtra ratiocinatio adverſus falſa Euclidis principia, & non ſatis conſiderate adſumta, ſtatuminatur. Addo igitur, noſtri reſpectu, cujuſvis generis rationis, aut exceſsivi, aut defectivi, antecedentem per quemvis numerum multiplicando; conſequentem autem cujuſvis generis rationis, aut exceſsivi, aut defectivi, per quemvis numerum multiplicando, noſtri reſpectu aufero. Quare ſi per eundem numerum, antecedens & conſequens cujuſvis rationis multiplicentur, eadem ratio manet; quod, quantum addo, tantum & auferam; &, dum primus terminus per multiplicationem adſcendit, adſcendendo quoque per multiplicationem ſequatur terminus ſecundus. Porro uti exceſsivæ rationes per antecedentium terminorum majorem multiplicationem quàm conſequentium, à nihili ratione adſcen-

derunt; ſic defectivæ rationes per majorem conſequentium terminorum multiplicationem quàm antecedentium, infra nihili rationem deſcenderunt. Ratio igitur ſeſquialtera, $\frac{3}{2}$, eſt ratio tripla, minuta ratione duplâ. Multiplicando enim nihili rationis $\frac{1}{1}$ antecedentem per 3, addo rationi nihili rationem triplam; at conſequentem nihili rationis multiplicando per 2, aufero à tripla ratione rationem duplam. Quod ſi jam compenſetur tripla ratio, addita, cum dupla ratione, ablatâ, reſidua eſt triplæ & duplæ differentialis ratio, nempe ſeſcupla. Rurſus ratio ſubſupertertia, $\frac{3}{4}$, eſt ratio tripla, minuta ratione quadruplâ. Quoniam enim multiplicando nihili rationis antecedentem per 3, addo nihili rationi rationem triplam; conſequentem autem nihili rationis per 4 multiplicando, à tripla ratione aufero quadruplam; planum eſt, quandoquidem plus aufero quàm addidi, infra nihili rationem fore quæ compenſatâ utrâque relinquitur, rationem nempe ſubſupertertiam, quæ ſubtriplæ & ſubquadruplæ differentialis ratio exiſtit. Atque hinc ſubtractionis doctrina claram lucem accipit. Si enim à ratione $\frac{2}{1}$ auferre velim rationem $\frac{3}{2}$, antecedentes inter ſe multiplicando & conſequentes, prius invertendi ſunt rationis auferendæ, $\frac{3}{2}$, termini, hoc modo, $\frac{2}{3}$. Multiplicando deinde rationis $\frac{2}{1}$ antecedentem per 2, addo ipſi rationem duplam; adeo ut, cum antea quoque adeſſet ratio dupla, jam inde facta ſit ratio quadrupla, in his terminis, 4. 2. 1: at rationis $\frac{2}{1}$ conſequentem multiplicando per 3, aufero à ratione quadrupla triplam: quæ conjunctim his terminis exponimus, 4. 2. 1. 3. Quod ſi jam

compenſentur quadrupla & tripla, reſidua eſt earundem differentialis ratio, ſupertertia. Cæterum rationis $\frac{7}{4}$ antecedentem 7 multiplicando per 3, addo rationi $\frac{7}{4}$ rationem triplam, ſic 21. 7. 4 : at ejuſdem rationis $\frac{7}{4}$ conſequentem 4, multiplicando per 4, aufero à ratione $\frac{21}{4}$, rationem quadruplam, in his terminis, 21. 7. 4. 16. Quoniam autem ablatæ quadruplæ rationis ſupra additam triplam exceſſus, nempe ratio $\frac{4}{3}$, non eſt tanta, quanta eſt primitiva ratio $\frac{7}{4}$, ideo reſidua eſt ratio exceſsiva, $\frac{21}{16}$. Rurſus, rationis $\frac{5}{4}$ antecedentem 5 multiplicando item per 3, addo rationi $\frac{5}{4}$ rationem triplam, in his terminis, 15. 5. 4: ſed conſequentem 4 multiplicando per 4, aufero à ratione $\frac{15}{4}$ rationem quadruplam. quæ conjunctim his terminis exponuntur, 15. 5. 4. 16. Quoniam autem ablatæ quadruplæ rationis ſupra additam triplam exceſſus, nempe ratio $\frac{4}{3}$, major eſt quàm primitiva ratio $\frac{5}{4}$; igitur ambabus compenſatis ratio exurgit defectiva, nempe $\frac{15}{16}$. Seu, ratio ablata adſcendit ſupra rationem additam. ideoque ex primitiva ratione $\frac{5}{4}$, exceſsivâ, facta eſt, per majorem ablationem quàm additionem, defectiva $\frac{15}{16}$. Certiſsimum ergo eſt, majorem eſſe rationem $\frac{7}{4}$ quàm ſit ratio $\frac{5}{4}$; quoniam, dum utrique eadem addita eſt, & eadem ab utraque ablata, majorem reſiduam reliquit ratio $\frac{7}{4}$ quàm ratio $\frac{5}{4}$: illa, rationem $\frac{21}{16}$; hæc, ne quidem nihili rationem, ſed defectivam $\frac{15}{16}$. Verum enimvero hinc colligi nequit, 7 ad 4 majorem rationem habere quàm 5 ad 4: quandoquidem ſi tripla utrique addatur, & rurſus quintupla ab utraque auferatur, reſiduæ ſunt rationes $\frac{21}{20}$ & $\frac{15}{20}$. quarum hæc $\frac{15}{20}$, in genere defectivo

major eſt quàm illa, $\frac{21}{20}$ in genere exceſsivo. Ex his autem omnibus illud primum conſtat, octavam propoſitionem, dum per ſeptimam definitionem, hoc eſt, per multipla, probatur, demonſtrari per rationum additionem & ſubtractionem. Quod quidem idem eſt, ac ſi quis, probaturus numerum 8 majorem eſſe numero 7, addat utrique eundum numerum, ut 4; unde conſurgunt 12 & 11; rurſus autem eundem numerum ab iis auferat, nempe 10. unde à priore reſiduus eſt 2, à poſteriore autem 1: denique hinc colligat, 8 majorem eſſe quàm 7. Quem certe demonſtrandi modum, ſi quid divini luminis vobis ſupereſt, ineptum judicabitis. quando quidem, qui abſque demonſtratione, naturali lumine, non comprehendit numerum 8 majorem eſſe numero 7, totum nempe ſua parte, nec abſque demonſtratione credet binarium eſſe majorem unitate. Omnes autem homines totum quavis ſua parte majus eſſe, communi notione percipiunt; ſeu, majus eſſe, quod longius ab initio ſuo, hoc eſt, à nihilo diſtat: id quod Euthymius principii loco adſumit. Deinde, niſi reſiduæ rationes utræque ſint exceſsivæ, falſum illud octavum theorema hinc enaſcitur. Uti enim, ſi à 12 & 10 auferam 11, reſidui ſunt $+1$ & -1, qui inter ſe æquales exiſtunt, ſed alter exceſsivus, alter defectivus: Sic ſi à rationibus $\frac{16}{9}$ & $\frac{1}{1}$ auferam rationem $\frac{4}{3}$, reſiduæ ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, inter ſe æquales; ſed una exceſsiva eſt, altera defectiva. Apol. Ultima hæc Euthymii doctrinam valde confirmant. attamen non ſatis adſequor, cur non Euclidis quoque conſiderandi modus retineri poſsit. Si enim miſtum nihili $\frac{4}{4}$, omni defectivo,

adeoque miſto $\frac{37}{42}$, & innumeris aliis, etiam ex Euthymii ſententia (paginâ 112) fortius, adeoque majus eſt, certe pronunciare poſſumus, 4 ad 4 majorem rationem habere quàm 3 ad 4. Rurſus, quia miſtum $\frac{37}{42}$ majus eſt miſto $\frac{27}{42}$, dicemus 3 ad 4 majorem rationem habere quam 2 ad 4. Ita enim & in exceſsivis, & defectivis, ut Euthymius vocat, rationibus, eodem modo, ſine ulla mentis turbatione, majorem terminorum inter ſe rationem, ex majore ratione, id eſt, ex ea, quæ minus ab exceſsiva majore ratione diſtat, ubique definiemus. Ideoque ſubtilitates meræ potius mihi videntur, quæ hîc diſſeruit Hermotimus, quàm ut utilia cenſeri poſsint, nedum ut neceſſariò in Geometriam ſint recipienda. ARCHIM. Certè non ſatis adſecutus es, ô Apolloni, cur Euthymii rationes conſiderandi modus fundamentum in natura habeat, Euclidis autem illo deſtituatur. Primum enim, quoniam ratio $\frac{4}{3}$, exempli causâ, æque diſtat à ratione nihili, atque ab hac ratione nihili diſtat ratio $\frac{3}{4}$; uti à nihilo æque diſtant $+1$ & -1; admodum concinne, & rerum naturæ convenienter, dicemus, illas duas rationes, iiſdem terminis comprehenſas, æquales exiſtere; uti numeri 1 & 1 inter ſe ſunt æquales; unam autem tanto ſpatio ſupra nihili rationem adſcendere, quanto infra nihili rationem deſcendit altera: plane uti exceſsiva unitas tanto intervallo nihilum ſuperat, quanto defectiva unitas à nihilo deficit. Quare ſicut duæ exceſsivæ rationes, $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{2}$ compoſitæ, utravis componentium majorem exceſsivam rationem faciunt, nempe $\frac{3}{1}$; ita compoſitæ duæ defectivæ, $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, utravis componentium ma-

jorem defectivam rationem, $\frac{1}{3}$, exhibent. Nec illud te turbare potuiſſet, quod de miſtorum viribus concinne propoſuit Hermotimus, ſi vim totius ratiocinationis profunde inſpexiſſes. Omnium enim rationum, exceſsivarum & defectivarum, minima eſt ratio nihili. Cum ergo ratio nihili $\frac{4}{4}$ omni alia exceſsiva ratione minor ſit, etiam ex Euclidis ſententia, conſtat exceſsivarum rationum nullam propiorem eſſe finibus defectivarum rationum; ideoque miſtum $\frac{47}{42}$ omni exceſsivo miſto eſſe debilius. Rurſus cum ratio nihili $\frac{4}{4}$ omni alia defectiva ratione quoque minor ſit, (quoniam minime eſt defectiva, magis autem defectiva eſt ratio $\frac{3}{4}$, & hac magis defectiva ratio $\frac{2}{4}$; ſicut -2 major defectivus numerus eſt quàm -1; & -3 adhuc major defectivus numerus quàm -2, & ſic deinceps) planum eſt, defectivarum rationum nullam propiorem eſſe finibus exceſsivarum rationum; ideoque miſtum $\frac{47}{42}$ omni defectivo miſto eſſe fortius. Quæ quidem, ſi quid de his percipio, & Geometriam in rationum contemplatione faciliorem reddunt, & Arithmeticam quoque in doctrina de minutiis. Quid enim, rogo vos, ô eximii mathematici, clarius docetur, quid concinnius, quàm quod rationum omnium quaſi centrum ſit ratio nihili, ſupra quam innumeræ rationes, magnæ, parvæ, tanquam diverſorum circulorum radii, adſurgunt; ſicut infra illam, ejuſdem magnitudinis, quaſi radii, aliæ deprimuntur? Cum autem exceſsiva ratio ſit, cujus antecedens conſequente major eſt, quanto ſpatio hæc ſupra, quaſi centrum ſuum, rationem nihili, elevatur, tanto infra hanc deprimitur

cognominis ratio defectiva, cujus antecedens conſequente eſt minor. adeoque unâ cognitâ, nota quoque eſt altera, & ſimul ſpatium inter utramque interceptum; ſeu, illarum differentia. Namque ratio ſeſquialtera à ratione ſubſeſquialtera diſtat, ratione bis ſeſquialterâ; quia nempe tanto ſpatio infra nihili rationem deſcendit ratio ſubſeſquialtera, quanto ſupra illam adſcendit ratio ſeſquialtera. Quod ſignificanter admodum, & toti doctrinæ ſuæ concinne Euthymius enunciat, rationem nempe ſeſquialteram exceſsivam, ſuperare rationem ſeſquialteram defectivam, ratione bis ſeſquialterâ. Quanto igitur exceſsiva quædam ratio major eſt, hoc eſt, altius ſupra nihili rationem adſcendit; tanto quoque major eſt cognominis defectiva, hoc eſt, altius infra nihili rationem deſcendit. Quare cum continuâ ſerie octies ratio $\frac{3}{2}$ aufertur à ratione exceſsiva $\frac{81}{16}$, poſtquam quater ablata eſt, ventum eſt ad rationem nihili, quarto gradu infra rationem $\frac{81}{16}$ ſitam; poſtquam rurſus quater à ratione nihili ablata eſt ratio $\frac{3}{2}$, deventum eſt quarto gradu, noſtri reſpectu, infra rationem nihili, ad rationem $\frac{16}{81}$ defectivam. Atque hinc Euthymianæ adſertionis veritas deducitur, rationem ſcilicet $\frac{4}{9}$ majorem eſſe ratione $\frac{6}{9}$, adeoque 4 ad 9 majorem rationem habere quàm 6 ad 9; quod hæ duæ rationes, $\frac{4}{9}$ & $\frac{6}{9}$, ab exceſsiva, ut à ratione $\frac{17}{8}$, ablatæ, $\frac{4}{9}$ tanquam major, minorem reſiduam rationem exhibeat, nempe $\frac{6}{4}$, quàm minor $\frac{6}{9}$, quæ reſiduam facit $\frac{9}{4}$. Sicut in mere exceſsivis rationibus, ratio $\frac{4}{1}$ major eſt ratione $\frac{2}{1}$, quia ſi utraque à ratione $\frac{8}{1}$ auferatur, illa minorem relinquit, hæc majorem. Idem quoque ex additione

fit manifeſtum. Omnium autem conſonantiſsima huic doctrinæ exempla Harmonice ſuppeditat. Homophonum enim, ſeu uniſonum, duæ chordæ, in ratione nihili tentæ, ſonant. Quod ſi harum chordarum altera in ſeſcupla ratione tentior ſit alterutrâ quæ uniſonum edunt, exceſsivam rationem, adeoque conſonantiam audiemus, dia pente intenſum: ſin illarum chordarum altera in ſeſquialtera ratione remiſsior ſit alterutrâ quæ uniſonum edunt, defectivam rationem, adeoque conſonantiam, audiemus, dia pente remiſſum. Quanto igitur ſpatio exceſsiva conſonantia dia pente, ſupra nihili conſonantiam, ſeu uniſonum, adſcendit, tanto ſpatio defectiva conſonantia dia pente infra nihili conſonantiam deſcendit. Utræque autem dis dia pente intervallo inter ſe diſtant. De minutiis ſimiliter ratiocinamur. quippe minutia $\frac{4}{3}$ tanta ratione integrum, nihili ratione comprehenſum, ſuperat, quanta ratione minutia $\frac{3}{4}$ ab integro deficit, hoc eſt, quanta ratione integrum ſuperat minutiam $\frac{3}{4}$. Quanta autem ratione minutia $\frac{6}{3}$ major eſt quàm minutia $\frac{4}{3}$, tanta ratione minor eſt cognominis defectiva $\frac{3}{6}$ quàm defectiva cognominis $\frac{3}{4}$. quia major defectiva, majorem ab integro diſtantiam infert. Porro exceſsiva minutia $\frac{6}{3}$ ſuperat minutiam defectivam $\frac{3}{6}$, ratione quadrupla: exceſsiva autem minutia $\frac{4}{3}$ ſuperat cognominem defectivam $\frac{3}{4}$, ratione bis ſupertertia, ſeu, ratione duplâ, minutâ ratione ſuperoctavâ. Hæc contemplatio in rerum natura fundata eſt, cum veterum, adeoque Euclidis, & quondam noſtra, omni fundamento, ſi verum fateri velimus, careat. Minutiarum autem

conſideratione deceptos fuiſſe antiquos, ingenioſe vidit Euthymius. quippe in exceſsivis rationibus, & minutiis, eadem veritas omnibus ſeculis conſtitit. Cæterum facilè quoque ex iſtis colligitur, diverſi generis rationes, exceſsivam & defectivam, inter ſe, quatenus una alterâ major eſt, aut minor, comparari non poſſe; quod comparatio ejuſdem generis nomina requirat: quippe eodem circo, eandem verſus metam decertant, quorum celeritatis inter ipſos expenditur. & divites cum divitibus comparantur, debitores cum debitoribus. Qvare Lucius, qui tria millia in bonis habet, comparari nequit cum Titio, qui quatuor millia debet; quod hic plura debeat, quàm ille poſsidet; ſed bene Lucius cum Mævio, qui duo millia poſsidet, comparabitur, & Titius cum Sejo, qui ſex millia debet. Similiter, ſi hi quatuor, Lucius, Mævius; Titius, Sejus, in centro terræ conſiſterent; ſuſcepto autem itinere Lucius adſcendendo tria milliaria emetiretur, dum Mævius duo; quod uterque adſcendat, & ad eaſdem ſuperas auras evadere conetur, hi bini inter ſe comparari poſſunt, ita ut Lucius Mævio in ſeſquialtera ratione celerius adſcendere dicatur. Rurſus autem Titius, ſi deſcendendo tria milliaria emetiatur, dum Sejus duo; quod uterque deſcendat, adeoque ad eundem tendat ſcopum, hi bini quoque inter ſe comparabuntur. Sed Lucius qui adſcendit, non reſpicit Titium qui deſcendit, etiamſi ſciat, ſe adſcendendo non fuiſſe celeriorem quàm ille fuerit deſcendendo; quod in nullam comparationem cum ipſo veniat. At vero ſi uterque adſcendiſſet, Lucius comitem habuiſſet Titium,

ideoque, ob parem celeritatem, nihili rationis comparationem incurriſſent. Exceſſus igitur & defectus inter ſe ſecundum quantitatem, hoc eſt, diſtantiam à nihilo, non comparantur; quod non ab una & eadem parte nihili proceſſerint. Porro ut exceſſus defectui æqualis eſſe poteſt, aut eo major, aut etiam minor; & viciſsim; ſimiliter de rationibus definiemus. Exceſsiva enim ratio $\frac{4}{3}$ tanta eſt in ſuo genere, quanta in ſuo genere defectiva ratio $\frac{3}{4}$. Nec fictio hîc quidquam poteſt, de qua ante (pag. 113.) Hermotimus. Fingatur enim nihili eſſe ratio, ratio $\frac{3}{4}$, quam ſupertertia ratione vincat ratio $\frac{3}{3}$, unitatis loco ponenda; hanc rurſus ſupertertia ratione ſuperet ratio $\frac{4}{3}$, quæ propterea eſt præcedentis $\frac{3}{3}$ dupla: non tamen magnitudines, aut termini, qui rationes comprehendunt, & mutuo reſpectu faciunt, hac fictione mutantur. Hæc omnia cum conſidero, non poſſum non in Euthymii ſententiam ire, qui octavam propoſitionem falſam cenſet. Quod in tribus caſibus præcipuis, brevitatis, puto, cauſa, ante probavit Hermotimus. Sunt autem in univerſum caſus quinque. Aut enim tertia D utrique reliquarum æqualis eſt, aut inæqualis. Si æqualis, aut majori æqualis eſt, aut minori: ſin inæqualis, aut utrâque minor eſt, aut major; aut majore quidem minor, minore autem major. Quos caſus ſi Hermotimi ordine numeris exponamus, erit I.mus $\frac{7}{4}.\frac{5}{4}$. II. $\frac{4}{6}.\frac{3}{6}$. III. $\frac{4}{3}.\frac{5}{3}$. IV. $\frac{7}{7}.\frac{5}{7}$. V. $\frac{7}{5}.\frac{5}{5}$. Horum duo, primus & quintus, ad octavæ propoſitionis primum membrum expenſi, veri ſunt; ſed ad ſecundum quoque, revertendo, falſi. Duo autem, ſecundus & quartus, contrà ad primum membrum

examinati, falſi ſunt; ſed revertendo, veri. Tertius caſus ſpurius eſt, nec comparationem admittit. Nullo itaquo caſu tota octava propoſitio vera invenitur. Decima autem propoſitio cum octava, cui, ut fundamento, ſuperſtructa eſt, corruit. Quod demonſtrare inſtituit Hermotimus. Porro novam propoſitionem, & Euclidéâ generaliorem, quatuor iſtis caſibus convenientem, ex Euthymii principiis hanc efformamus. *Duarum inæqualium magnitudinum illa, ad eandem, utràque aut majorem, aut minorem, aut alterutri æqualem, majorem rationem habet, quæ longius ab hac diſtat: & viciſſim.* Atque hæc breviter, ad Euthymii, ni fallor, mentem hîc diſſerui, ut quæ mea de his novis inventis ſententia ſit, omnes cognoſceretis. EUCL. Et judicii tui perſpicacitate, & doctrinæ ipſius, undecunque confirmatæ, evidentia adducimur, ut in hac cauſa victi circinum & regulam Euthymio tradamus. HERMOT. Glorioſa verò victoria, ingenioſiſsimis adverſariis extorta. Tuo autem, ô divine Archimedes, judicio adprobatam eſſe hanc doctrinam, tua voce defenſam, hoc verò eſt, æternæ veritatis monumentis à ſummo geometra illam eſſe inſertam. Nunc ad ea pergam, quæ in Scholiaſte, & in veſtris propoſitionibus, notavit Euthymius. ARCHIM. Superfluus iſte labor erit, quòd nunc ipſi illa corrigere ſciamus. HERMOT. Illa quoque, ſi pateris, referam, ut & cæteri magis ac magis in hac nova doctrina confirmentur. Scholiaſtes igitur in quintæ & ſeptimæ definitionis explicatione, quam pag. 28 retuli, Euclidéâ probandi methodo relictâ, ineptè aliam confinxit. Euclides enim

primæ & tertiæ magnitudinis æque multiplas ſumendo, utrique rationi eandem rationem addit; ſed & ſecundæ & quartæ æque multiplas ſumendo, eandem rationem ab utraque aufert. Scholiaſtes autem, decuſſatim antecedentes multiplicans per conſequentes, ex parte vulgarem methodum ſequitur, & optimam, quæ conſequentes inter ſe multiplicandas tradit, & decuſſatim antecedentes per conſequentes: quomodo utraque ratio tantâ ratione augetur, quanta minuitur, & quod in primis fieri debebat, ad eandem conſequentem reducitur: at ſecundæ & quartæ æque multiplas ſumens; quartæ autem multiplam utriuſque rationis conſequentem faciens, utrique propoſitæ rationi addit rationem ſecundæ ad tertiam. Quod in exemplis ipſius, quæ numeris, expoſuit, clare perſpicitur. quorum primo, ad quintam definitionem pertinente, explorat num hæ duæ rationes, $\frac{12}{6}$. $\frac{8}{4}$ inter ſe ſint æquales. Cum igitur non ſolum tertium, ſed & quartum terminum per ſecundum multiplicare deberet, contrà ſecundum & quartum multiplicat per tertium, hoc eſt, rationi tertii ad quartum addit rationem ſecundi ad tertium, in his terminis, 6. 8. 4. ſeu in iſtis multiplis, 48. 64. 32. unde hæ duæ rationes ſeſquialteræ procreantur, $\frac{48}{32}$. $\frac{48}{32}$, cum ſecundum inceptam methodum deberent eſſe duæ in ratione dupla, in qua primitivæ $\frac{12}{6}$. $\frac{8}{4}$ ſpectantur. Rurſus exploraturus, utra harum rationum $\frac{10}{4}$. $\frac{6}{3}$ major ſit, quod ſeptima definitione fecit Euclides, eadem methodo rationi $\frac{6}{3}$ addit rationem $\frac{4}{6}$, hoc eſt, utramque primitivam rationem minuit ratione ſeſquialterâ, in his terminis, $\frac{30}{18}$. $\frac{24}{18}$. Idem autem

eſt tertius modus, cum prima ratio minor eſt ſecundâ, in hoc exemplo, $\frac{12}{7}$. $\frac{18}{9}$. quarum termini iſtâ methodo multiplicati, ſunt, $\frac{108}{162}$. $\frac{116}{162}$. Primitivis itaque rationibus addit rationem ſecundi ad tertium: ac ſi quantitates exploraret rationum, $\frac{12}{8}$. $\frac{6}{4}$. | $\frac{10}{6}$. $\frac{4}{3}$. | $\frac{12}{8}$. $\frac{7}{9}$. Unde liquet parvi momenti eſſe hoc ſcholium. Nunc tua quædam, ô Archimedes, & Eutocii in illa commentarium, examinabo. Illud autem primum de ſecunda propoſitione libri primi de Sphæra & Cylindro ſum moniturus, male, tum in Baſileenſi editione, tum in Rivaltiana, diagramma hujus propoſitionis eſſe deformatum. Cum enim hoc ſolùm requiratur, ut A H ſit primò major quàm D; (uti ex tota demonſtratione patet, & v. 22.) quomodo in ipſorum quoque diagrammatis punctum H caderet intra B A; illi ſiniſtre putarunt, ipſam C H debere eſſe majorem quàm D. Ter igitur in noſtro diagrammate compoſita A C, facit magnitudinem A H, primò majorem; quod quoque in demonſtranda octava quinti Euclides duntaxat voluit; magnitudine D. Cæterum paralogiſmus hîc in demonſtrando eſt v. 24. quippe C A ad A H majorem rationem habet quàm A C ad C B. hoc eſt, 4 ad 12 non minorem rationem habet quàm 4 ad 10; quod ex Euclidis octava adſumſit Archimedes; ſed majorem, ob terminorum 4 & 12 majorem inter ſe diſtantiam, quàm terminorum 4 & 10, qui duas rationes defectivas faciunt. Verum tamen eſt, componenti E F ad F G, ſeu 12 ad 9, minorem rationem habere quàm A B ad B C, ſeu 14 ad 10. Quod cum mirum videri poſsit, numeris clare hîc exponam.

Reducantur enim rationes defectivæ, $\frac{4}{12}$. $\frac{4}{10}$, ad alias eundem conſequentem habentes, $\frac{5}{15}$. $\frac{6}{15}$. Harum termini antecedentes, 5 & 6, unitate inter ſe diſtant, quæ facit differentialem rationem $\frac{5}{6}$, quâ major defectiva $\frac{5}{15}$ ſuperat minorem $\frac{6}{15}$. Quemcunque autem numerum utrique antecedenti addidero, ut ex defectivis rationibus exceſsivæ fiant, ex majore defectiva, quæ longius ab exceſsivarum rationum finibus abeſt, minor exceſsiva fiet; & contrà, ex minore defectiva, quæ exceſsivarum rationum finibus propior eſt, exceſsiva major. Si enim utrique antecedeuti, 5 & 6, addam 9; à priore ratione aufero; ſeu, noſtri & exceſsivarum rationum reſpectu, ipſi addo, rationem $\frac{14}{5}$; poſteriori autem addo rationem $\frac{5}{2}$: unde exſurgunt rationes, $\frac{14}{15}$. $\frac{15}{15}$. quarum illa, $\frac{14}{15}$, exceſsivarum reſpectu minor eſt; hæc, $\frac{15}{15}$, major. Rurſus, ſi utrique antecedenti, 14 & 15, addam 6; priori rationi, $\frac{14}{15}$, addo primùm rationem $\frac{15}{14}$, unde exceſsivarum rationum fines adtingit; quos & ingreditur, additâ inſuper ratione $\frac{20}{15}$, ſeu $\frac{4}{3}$: poſteriori autem rationi, $\frac{15}{15}$, addo rationem $\frac{7}{5}$. Cum igitur utrique antecedenti addiderim 9 & 6, id eſt, totum conſequentem 15; eundem quidem numerum utriuſque rationis antecedenti addidi, ſed non utrique rationi eandem rationem. Unitas enim utrique antecedenti duarum defectivarum rationum, eundem conſequentem habentium, addita, eò majorem rationem aufert, ſeu, exceſsivarum reſpectu, addit, quo defectiva erat major, & minoribus terminis comprehenſa: duarum autem exceſsivarum rationum, eundem conſequentem habentium, utrique antecedenti unitas addita, eò majo-

rem rationem addit, quò exceſsiva erat minor, & minoribus terminis incluſa. Quare novem unitates, rationis $\frac{5}{15}$ antecedenti additæ, ab ipſa auferunt rationem majorem, $\frac{14}{5}$; poſterioris rationis antecedenti additæ, ab ipſa auferunt rationem minorem, $\frac{15}{6}$. ſeu $\frac{5}{2}$. Superat enim ratio $\frac{14}{5}$ rationem $\frac{5}{2}$, ratione $\frac{28}{25}$. Rurſus, unitas utrique antecedenti addita, à priore aufert rationem $\frac{15}{14}$; poſteriori autem addit rationem $\frac{16}{15}$. quarum illa major eſt; hæc, minor. Denique, quinque unitates utrique antecedenti additæ, priori rationi addunt rationem majorem, $\frac{20}{15}$, ſeu $\frac{4}{3}$; poſteriori autem minorem, $\frac{21}{16}$. Totum igitur conſequentem (15) prioris rationis ($\frac{5}{15}$) antecedenti (5) addendo, addo huic rationi rationem $\frac{8}{3}$; at poſterioris rationis ($\frac{6}{15}$) antecedenti (6) totum conſequentem (15) addendo, addo huic rationi rationem $\frac{7}{2}$. Ratio autem differentialis $\frac{8}{7}$; quâ priori addita $\frac{8}{3}$, ſuperat poſteriori additam $\frac{7}{2}$; addita differentiali rationi $\frac{22}{20}$; quâ poſterior producta ($\frac{22}{15}$) ſuperat productam priorem, ($\frac{20}{15}$) efficit differentialem rationem $\frac{6}{5}$, quâ prior defectiva $\frac{5}{15}$ ſuperabat poſteriorem defectivam $\frac{6}{15}$. Planum itaque eſt; ſi majoris defectivæ rationis antecedenti numerus addatur, minorem inde exceſsivam oriri, quàm ſi idem numerus addatur antecedenti defectivæ minoris. Falſa igitur eſt ratiocinatio componentis, in defectivo rationum genere uſurpata; vera, in exceſsivo. Quare ex adjunctis quinto libro propoſitionibus vigeſimaoctava, ſecundum Commandini numerationem; quæ Pappo libro VII eſt propoſitio tertia, & hîc quoque ab Eutocio pagina 39 demonſtratur; partim vera eſt, partim falſa.

Vera in rationibus exceſsivis, cujuſmodi diagrammata illi adhibent; falſa in rationibus defectivis, ex Euthymii doctrina: quamvis illud neget Pappus ejuſdem libri propoſitione quarta; & Eutocius hîc paginâ 40. v. 36. Eadem de cauſa ratiocinatio dividentis vera eſt in rationibus exceſsivis; falſa in defectivis. Quare ex adjunctis quinto libro propoſitionibus etiam vacillat vigeſimanona. quam Eutocius hîc demonſtravit paginâ 40. v. 20. Atque eadem hac componentis ratiocinatione uſus Eutocius, male demonſtravit hîc paginâ 41. v. 2. ratiocinationem convertentis; quam ante ipſum bene demonſtrârat Pappus propoſitione ſexta, quæ in adjunctis quinto libro eſt XXX. Porro cum rationes exceſsivæ & defectivæ inter ſe comparantur, falſæ quoque ſunt in adjunctis quinto libro propoſitiones XXXI & XXXII, quæ Pappo ſunt VIII & IX. At veræ illæ ſunt ex Euthymii ſententia, qui exceſsivas rationes cum exceſsivis, & defectivas cum defectivis ſolùm comparari poſſe ſtatuit. Simpliciter autem falſæ ex illis ſunt XXVI & XXVII. quæ Pappo ſunt VII & V. Octo igitur in univerſum falſas propoſitiones in quinto Elementorum libro notavit Euthymius. Ex illis autem multæ aliæ tum propoſitiones, tum demonſtrationes falſæ propullularunt, quas recenſere nimis longum foret. Veterum præterea aliquas in Pappo Euthymius notavit; nempe ſeptimi libri XI & XII. Deinde XVI, quæ in exceſsivis rationibus vera eſt; falſa in defectivis: unde paralogiſmorum origo pagina 48. v. 23. quamvis ter ab Eutocio hîc ſit demonſtrata; primùm pag. 51. v. 18. deinde ejus converſum

pag. 52. v. ultimo. & pag. 65. v. 29. Porro falſæ ſunt, propoſitio CLXXX, quæ eſt ſecundi Conicorum Apollonii lemma V. propoſitio CLXXXI, quæ eſt ejuſdem libri lemma VI. propoſitio CLXXXVII, quæ eſt lemma XII; ſed in lemmatis ſecundo Apollonii libro à Commandino præmiſsis XI. Ex parte autem male demonſtratæ ſunt propoſitiones CCXXXII. CCXXXIII. CCXXXIV. quæ ſunt tria lemmata; in quorum ſingulis hallucinatus eſt Commandinus. Duodecimi enim lemmatis duorum caſuum diagrammata commutavit, dum primi caſus diagramma facit, quando G cadit ultra BC. contrà autem noſter MS.tus primi caſus diagramma recte facit, quando G cadit intra BC, & H intra EF: ſecundi autem caſus diagramma, quando G cadit ultra BC, & H ultra EF. Tertiidecimi diagramma & MS.tus, & Commandinus perperam faciunt præcedentis lemmatis diagramma ſecundum: unde bis pro *μείζονα λόγον*, quod probè manu exarati libri habent, ſcribendum putat, *ἐλάσσονα λόγον*. Similiter erravit in lemmate XIV. ubi tamen & noſter MS.tus poſteriore loco perperam habet, *ἐλάσσονα*. item prioris caſus diagramma. Sed & ipſas propoſitiones cum diagrammatis ſuis reſtitutas, ut & Græca ipſarum ex MS.to verba mihi tradidit Euthymius.

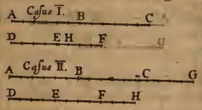
PAPPI ALEXANDRINI MATHEMATICORUM COLLECTANEORUM LIBRI VII PROPOSITIO CCXXXII. LEMMA XII.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ· ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ. ἔτι δὲ ἡ ΒΓ

SIt AB æqualis ipſi BC; & DE, ipſi EF. porro BC ad

CG majorem rationem habeat quàm EF ad FH. Dico in primo caſu & AG ad BC majorem rationem habere quàm DH ad EF; in ſecundo caſu, minorem.

πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ. ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως καὶ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσω.



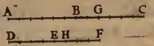
Quoniam enim BC ad CG majorem rationem habet quàm EF ad FH; CB ad BG in primo caſu minorem rationem habet quàm FE ad EH: in ſecundo caſu, majorem. Quare & AB ad BG in primo caſu minorem rationem habet quàm DE ad EH: in ſecundo caſu, majorem. Et GA ergo ad AB in primo caſu majorem habet rationem quàm HD ad DE: in ſecundo caſu, minorem. Eſt autem, ut AB ad BC, ſic DE ad EF. Ex æquo igitur in primo caſu AG ad BC majorem rationem habet quàm DH ad EF: in ſecundo caſu, minorem.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΘ. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, μείζω. ὥστε καὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, μείζω. καὶ ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσω. καὶ ἔστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. δι' ἴσου ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσω.

PROPOSITIO CCXXXIII. LEMMA XIII.

Ἔςω πάλιν ἴση ἑ μὲν AB *τῇ* BΓ· *ἡ δὲ* ΔE *τῇ* EZ. *ἔτι δὲ ἡ* AH *πρὸς τὴν* HB *ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ* ΔΘ *πρὸς τὴν* ΘE. *ὅτι καὶ ἡ* BΓ *πρὸς τὴν* ΓH *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* EZ *πρὸς τὴν* ZΘ.

Sit iterum AB æqualis ipſi BC; & DE ipſi EF. porro AG ad GB minorem rationem habeat quàm DH ad HE. Dico & BC ad CG majorem rationem habere quàm EF ad FH.



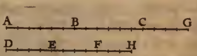
Ἐπεὶ γὰρ, κατ᾽ ἀναςροφὴν καὶ διαίρεσιν, ἡ HB *πρὸς τὴν* BA, *τυτέςι πρὸς τὴν* BΓ, *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΘE *πρὸς τὴν* EΔ, *τυτέςι πρὸς τὴν* EZ: *ἀναςρέψαντι καὶ διελόντι ἡ* BΓ *πρὸς τὴν* ΓH *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* EZ *πρὸς τὴν* ZΘ.

Quoniam enim, per converſionem & diviſionem, GB ad BA, hoc eſt, ad BC, majorem rationem habet quàm HE ad ED, hoc eſt, ad EF; convertenti & dividenti BC ad CG majorem rationem habet quàm EF ad FH.

PROPOSITIO CCXXXIV. LEMMA XIV.

Ἔςω ἴση μὲν ἡ AB *τῇ* BΓ· *ἡ δὲ* ΔE *τῇ* EZ. *καὶ ἔτι ἡ* AH *πρὸς τὴν* HB *μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ* ΔΘ *πρὸς τὴν* ΘE. *ὅτι ἡ* BH *πρὸς τὴν* HΓ *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* EΘ *πρὸς τὴν* ΘZ.

Sit AB æqualis ipſi BC; & DE, ipſi EF. porro AG ad GB majorem rationem habeat quàm DH ad HE. Dico BG ad GC majorem rationem habere quàm EH ad HF.



Ἐπεὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν ἡ AB, *τυτέςιν ἡ* ΓB, *πρὸς τὴν* BH *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΔE, *τυτέςιν ἡ* ZE, *πρὸς τὴν* EΘ· *ἀναςρέψαντι κατὰ διαίρεσιν ἡ* BH *πρὸς τὴν* HΓ *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* EΘ *πρὸς τὴν* ΘZ.

Quoniam enim per diviſionem AB, hoc eſt, CB, ad BG majorem rationem habet quàm DE, hoc eſt, FE, ad EH; convertenti per diviſionem BG ad GC majorem rationem habet quàm EH ad HF.

JAm ad alteram octavæ propoſitionis de Sphæra & Cylindro demonſtrationem veniemus; quamvis eo labore functus videri poſsim, dum ſuprà & verba recitavi, à quibus paralogiſmorum illa ſeries incipit, & cauſam addidi, cur in Geometriam impingere cenſeantur. Hoc ſolùm reſtare puto, ut numeros, quibus figurarum iſtarum lineas Euthymius adcommodavit, breviter exponam. In primæ itaque demonſtrationis figura, (pag. 42) ſphæræ diameter BD eſt partium 13. quarum 9 habet BF; 4, FD. Radius igitur BE, ſeu ED, cui æqualis eſt BK, habet partes $6\frac{1}{2}$; AF, 6. Porro FG, $6\frac{8}{9}$. BH, $14\frac{5}{8}$. BN, $9\frac{3}{4}$. Major ſphæræ portio ABC, æqualis cono AHC, eſt ſolidarum partium $\frac{18711}{21}$, ſeu 891: minor ADC, æqualis cono AGC, $\frac{5456}{21}$, ſeu $259\frac{17}{21}$. Majoris autem portionis ſuperficies, $\frac{2574}{7}$, eſt ad minoris portionis ſuperficiem $\frac{1144}{7}$, ut 9 ad 4. cujus rationis $\frac{9}{4}$ dupla eſt ratio $\frac{81}{16}$. Dicit igitur Archimedes, portionem ſphæræ majorem ABC, 891, ad minorem portionem ADC, $259\frac{17}{21}$, minorem rationem habere quàm ſit dupla rationis ſuperficiei majoris portionis ad ſuperficiem minoris portionis; nempe minorem quàm $\frac{81}{16}$, hoc eſt, $\frac{891}{176}$. (quippe numerus 176 longius diſtat à numero 891, quàm ab eodem hoc numero diſtat numerus $259\frac{17}{21}$.) majorem autem quàm ſit ſeſquialtera rationis ſuperficiei majoris portionis ad ſuperficiem minoris portionis; nempe majorem quàm $\frac{54}{16}$, hoc eſt, $\frac{891}{264}$. (quippe major diſtantia eſt inter numeros 891 & $259\frac{17}{21}$, quàm inter numeros $\frac{891}{264}$.) In hoc autem demonſtrando cum inveniſſet (pag. 43. v. 33.) HF ad FK minorem rationem habere quàm KF ad FG;

nempe $23\frac{1}{8}$ ad $15\frac{1}{2}$ minorem rationem habere quàm $15\frac{1}{2}$ ad $6\frac{3}{8}$; inde concludit rectangulum ab extremis HFG contentum, minus eſſe rectangulo à mediis, hoc eſt, quadrato ab FK; nempe $162\frac{3}{4}$ eſſe minorem quàm $240\frac{1}{4}$; ſeu 651 minorem eſſe quàm 961. Hoc, ut & ſupra dictum eſt, veritati conſonat, ſi rationes exceſsivæ, major ac minor, uti hîc, præcedant, quarum magnitudinibus deinde rectangula illa comprehendantur: at ſi inverſo modo rectangula illa præceſſerint, reſolvendo & verum, & falſum, inde deducere poſſum. Verum, ſi rectangula illa in rationes exceſsivas reſolvantur; quod & in hac priore demonſtratione fit (pag. 44. v. 16.) quando rectangulum à BFD, minus exiſtens quàm rectangulum à BED; nempe 36 minor quàm $42\frac{1}{4}$; reſolvitur in rationes exceſsivas, ita ut FB ad BE minorem rationem habeat quàm ED ad DF; nempe 9 ad $6\frac{1}{2}$ minorem rationem quàm $6\frac{1}{2}$ ad 4. Falſum autem, ſi in defectivas; quod in poſteriore hujus octavæ propoſitionis demonſtratione factum pag. 48. v. 27. Cum enim quadratum à CH in HF, minus ſit rectangulo à BHC in HG, nempe 496 minor quàm 504: reſolvendo hæc in rationes defectivas male concludit, quadratum à CH ad rectangulum à BHC, 16 ad 24, minorem rationem habere quàm rectam GH ad HF, $10\frac{1}{2}$ ad $15\frac{1}{2}$; hoc eſt, rectam GH ad HF, $10\frac{1}{2}$ ad $15\frac{1}{2}$, majorem rationem habere quàm CH ad HB, 4 ad 6. Atque ita ex falſo ſecundo membro octavæ propoſitionis V^{ti} Elementorum ratiocinando pergens, GH ad ambas AH, KE, $10\frac{1}{2}$ ad $9+6\frac{1}{2}$ majorem rationem habere dicit quàm CH ad HB, 4 ad 6. adeoque CH ab-

latâ ab HG, 4 à $10\frac{1}{2}$; & LE, quæ æqualis eſt ipſi BH, ab EK, 6 à $6\frac{1}{2}$; monſtrandum dicit, reliquam CG ad reliquas ambas AH, KL, $6\frac{1}{2}$ ad $9+\frac{1}{2}$, majorem rationem habere quàm CH ad HB, 4 ad 6; hoc eſt, HB ad HA; hoc eſt, LE ad HA, 6 ad 9. Permutando autem, quod hîc fit à defectivo ad exceſsivum genus tranſeundo, verum eſt, KE ad EL, $6\frac{1}{2}$ ad 6, majorem rationem habere quàm ambas KL, HA ad HA, $\frac{1}{2}+9$ ad 9. at dividendo, quod fit, rurſus ex genere exceſsivo tranſeundo in genus defectivum, contra vera Euthymii elementa concludit, KL ad LE, $\frac{1}{2}$ ad 6, majorem rationem habere quàm KL ad HA, $\frac{1}{2}$ ad 9. quia minor eſt LE quàm HA; adeoque ex falſo ſecundo octavæ V^{ti} Elementorum membro, eadem KL ad minorem LE, majorem rationem habet quàm ad majorem HA. Hanc autem paralogiſmorum ſeriem explicatiorem reddidit Eutocius, (pag. 67. v. 5.) &, ex defectivo rationum genere in exceſsivum tranſeundo, veris concluſionibus intermiſtam. Quoniam enim monſtrandum eſt, rectam GH ad ambas HA, KE, majorem rationem habere quàm CH ad HB; $10\frac{1}{2}$. 9+ $6\frac{1}{2}$. + 4. 6. quod eſt falſum; permutando, quod hîc fit in contrarium genus tranſeundo, verè concluditur, $10\frac{1}{2}$ ad 4 + 9 + $6\frac{1}{2}$. 6. Porro dividendo, $6\frac{1}{2}$ ad 4, recte majorem rationem habere dicitur quàm 9 + $\frac{1}{2}$. 6. Sed permutando, quod hîc fit ab exceſsivo tranſeundo ad genus defectivum, falſum eſt, $6\frac{1}{2}$ ad $9\frac{1}{2}$ majorem rationem habere quàm 4 ad 6. At vero, ut 4 ad 6, ita 6 ad 9. Monſtrandum ergo, $6\frac{1}{2}$ ad $9\frac{1}{2}$ + 6. 9. quod falſum. uude permutando verum, $6\frac{1}{2}$. 6 + $9\frac{1}{2}$. 9. Rurſus autem divi-

dendo, quod hîc fit ex genere exceſsivo in contrarium genus tranſeundo, falſum colligitur, ⅔ ad 6 majorem rationem habere quàm ⅔ ad 9. Cæterum horum paralogiſmorum originem & cauſam, ſequentibus numeris fundanis evidentius exponam. Quoniam enim 4 ad 3 minorem rationem habet quàm 3 ad 2; igitur rectangulum ab extremis 4 & 2, nempe 8, minus eſt rectangulo à mediis, 3 & 3, ſeu quadrato 9. Seu, quod idem; quoniam 3 ad 2 majorem rationem habet quàm 4 ad 3; igitur rectangulum ab extremis, majus eſt rectangulo à mediis, nempe 9 major quàm 8: quod etiam Serenus libro II.[do] propoſitione prima demonſtravit; & rurſus Eutocius ad XXXIV libri I Conicorum Apollonii. At contrà, ſi rectangulum 8 propoſitum ſit minus rectangulo 9; recte hinc colligo, 4 ad 3 minorem rationem habere quàm 3 ad 2; reſolvendo nempe rectangula in laterum rationes exceſsivas; ſed perperam, eadem rectangula in laterum rationes defectivas reſolvendo, definio, 2 ad 3 minorem rationem habere quàm 3 ad 4. quomodo rectángula illa in rationes reſolvendo colligere poſſum ex octava V.[ti] Euclidis. In priore igitur octavæ propoſitionis de Sphæra & Cylindro demonſtratione, utroque modo, & rectangula ex lateribus componendo, & rectangula in latera reſolvendo, à veritate non eſt aberratum: in poſteriore autem demonſtratione, rectangula in laterum rationes defectivas reſolvendo, paralogiſmum Archimedes commiſit, quem ex veris Euthymii elementis corrigendum hactenus demonſtravi.

Nunc ad ea veniam refutanda, quæ contra omnem antiquitatem primus in Geometriam induxit hic Theo Alexandrinus. ARCHIM. Ingratum plane ſermonem ordieris, quo auſcultando aures meas non ſum defatigaturus. Quin potius ad ea tranſis explicanda, quæ concinnè ex his omnibus deduci poſſunt: quod tertio loco ex ore Euthymii te facturum ſpoponderas. HERMOT. Verbis ſtandum. atque eò magis, quod hic Theo, & tota Mathematicorum poſteritas, quæ eundem hunc errorem erravit, magnis & evidentibus argumentis adducti, hoc ſe ſtatuiſſe putant. THEO. Ita certe putavi. & errorem meum, ut audio, poſteri largiter ampliarunt. Sed ex Euthymii doctrina, quam hactenus propoſuit Hermotimus, agnovi errorem, & ingenua voce nunc repudio. illis quoque, qui mea auctoritate in eum inducti ſunt, auctor rurſus ſum, ut tanquam falſum, & gignendis erroribus obnoxium, illud dogma rejiciant. ARCHIM. Facis quod ingenuum hominem, & mathematicum decet, qui nullla pertinacia, & altercandi lubidine, paralogiſmos ſuos defendere conatur; ſed veritatem non minus diſcere quàm docere eſt paratus. HERMOT. Me verò felicem, qui tantum memoriâ valui, ut recenſendis Euthymii mei dogmatis ſummos undiquaque viros in eandem ſententiam pertraxerim! Unum tamen mæ ſollicitum habet, quod Mathematici, qui nunc ſuperant, argumentis ſuis non ſatisfactum clamitabunt, niſi etiam veſtro calculo erronea ſint deprehenſa. Rogo itaqua vos, ut pauca etiam de iſtis me narrantem audiatis; eoque magis, quod novum quoque proportionum genns

ab uno, non infimi ſubſellii Geometra, nuper ſit inventum, cujus adminiculo circuli quadraturam, toties irrito conatu à vobis tentatam, ſpiſsis voluminibus ſe demonſtraſſe opinatur. Præterea ad Euclidis Elementorum gloriam à tetris erroribus vindicandam quædam hîc adſpergentur. quæ, ut incorrupta, nulloque pravæ interpretationis vitio contaminata ſerventur, non tantùm poſteritatis, ſed etiam veſtrûm omnium, quorum ſcripta iis nituntur, intereſſe arbitror. ARCHIM. Euclidis hæc cura ſit. falſis audiendis nullum ego tempus collocem. APOL. Nec ego ſane. nimis enim tetrica illa erunt, & defatigando cerebro tantùm nata. EUCL. Certè & meâ causâ, & Mathematicorum, qui omnes iis erroribus irretiti nunc inter mortales degunt, hæc quoque veſtris calculis vel probare, vel rejicere deberetis. ARCHIM. Tuam ergo in gratiam, ô Euclide, ingrato adeo ſermone hîc detinebimur. HERMOT. Pauco vos ſum detenturus, monſtrato deinde falſarum propoſitionum catalogo, in quo, quot libuerit, legetis. Fontem igitur erroris, & ſcaturiginem Euthymius vocat vocabulum πηλικότης, *quantitas*, cujus verum ſignificatum atque uſum, ex Mathematica antiquitate productum, ſuprà retuli. Diſerte enim negat Euthymius, vocabulum πηλικότης, *quantitas*, ſignificare magnitudinem, aut numerum, qui rationis quantitatem veram ſolus exhibeat. quod Eutocius dixit, & ante ipſum Theo. In illo autem vocabulo rectè explicando quanto ingenioſior eſt, Theone & Eutocio haud dubie junior Scholiaſtes, cujus verba pag. 12 produxi; tanto ineptior eſt ille Scholiaſtes, quem

citavi pag. 21. Quippe abſque ullo evidentioris doctrinæ compendio rationum componendarum quantitates per minuta ſexageſima indagando, hanc doctrinam non tàm explicaſſe quàm intricaſſe eſt judicandus. Rationis enim $\frac{8}{2}$, compoſitæ ex rationibus $\frac{8}{4}$ & $\frac{4}{2}$, quantitatem cæteri dicunt eſſe quaternarium, ex quantitatum, ſeu denominatorum 2 & 2 inter ſe multiplicatione productum: hic autem Scholiaſtes, maximum componendarum rationum terminum extremum æqualem ponens 60 minutis primis, ſeu uni parti, quam nunc Arabum conſuetudine gradum vocant; hujus dimidium ſumit, minuta 30; quoniam octonarii dimidius eſt quaternarius: Rurſus numeri 60 dimidium ſumit 30; quoniam quaternarii dimidius eſt binarius: Deinde 30 minuta prima per 30 minuta item prima multiplicat, unde fiunt 900 minuta ſecunda. quibus ad minuta prima reductis fiunt 15 minuta prima, ad quæ 60 ſunt in ratione quadrupla, uti 8 ad 2. Male autem 15 ad 60 refert, cum contrà 60 cum 15 comparare deberet; quoniam rationes exceſsivas, $\frac{8}{4}$ & $\frac{4}{2}$, propoſuit; non autem defectivas, $\frac{2}{4}$ & $\frac{4}{8}$. Primi igitur exempli ponere debuiſſet hos numeros, $\frac{60}{30}.\frac{60}{30}.$ qui inter ſe multiplicati faciunt $\frac{3600}{900}$ minuta ſecunda, in ratione quadrupla; ſeu in eadem ratione $\frac{60}{15}$ minuta prima. Eadem methodo ſecundi exempli hos numeros poſuiſset; $\frac{3}{60}.\frac{300}{60}\,|\,\frac{900}{3600}$ ſeu $\frac{15}{60}.$ non autem, ut ſecundorum minutorum ad prima reductionem evitaret, iſtos, $\frac{3}{60}.\frac{5}{1}.$ qua methodo & quinti exempli numeros adſumſit $\frac{12}{60}.\frac{4}{1}\,|\,\frac{48}{60}.$ cum hos adhibere potuiſſet, $\frac{12}{60}.\frac{240}{60}\,|\,\frac{2880}{3600}\,|\,\frac{48}{60}.$ Quamvis eodem res recidat, & cætera quoque exempla

ita expediri poſſint, ut primæ rationis ſexageſima ſumantur, alterius autem multipli numeri, aut pars, aut partes, à quibus ratio denominatur. Tertii exempli numeros recte expoſuit, $\frac{30}{60} \cdot \frac{40}{60} \mid \frac{1200}{3600} \mid \frac{20}{60}$. ut & quarti, $\frac{30}{60} \cdot \frac{20}{60} \mid \frac{600}{3600} \mid \frac{10}{60}$. In ſexto autem & ultimo exemplo, ſecundum eandem methodum expediendo, plane defecit. Cum enim propoſitæ rationis ſubduplæ, ex ratione ſubſequialtera & ſubſupertertia compoſitæ, ſciret ex octava quinti, rationem ſubſupertertiam majorem eſſe ratione ſubſeſquialtera, uti $\frac{3}{4}$, quantitas ſeu denominator ſubſupertertiæ rationis, major eſt denominatore $\frac{2}{3}$ rationis ſubſeſquialteræ, debuit omnino rationis ſubſupertertiæ quantitatem majorem adſumere quàm rationis ſubſeſquialteræ; at male adſumſit illius rationis minuta 60; hujus, 30. quamvis multiplicatis inter ſe his numeris propoſitum conficiat; ſed divinando potius quàm ratiocinando. Cum enim 60 ad 45 eandem rationem habeant quam 40 ad 30, extremos duos caſu quodam inter ſe multiplicavit, cum medios ſecundum methodum ſuam inter ſe multiplicare debuiſſet, hoc modo: $\frac{40}{60} \cdot \frac{45}{60} \mid \frac{1800}{3600} \mid \frac{30}{60}$. Pro verbis ipſius pag. 24. v. 15. unâ liturâ inductis, ſi omnis iſta de denominatoribus doctrina alicujus momenti eſſet, hæc reponerem: *καὶ ἐπεὶ ὁ δύο ὑφημιόλιός ἐστι τοῦ γʹ· ὁ δὲ γʹ ὑπεπίτριτος τοῦ δʹ· λαμβάνω τὰ μʹ λεπτὰ, τὸ τῆς μονάδος δίμοιρον. καὶ πάλιν τὰ μέ λεπτὰ, τὰ τῆς μονάδος τρία τέταρτα. καὶ ποιῶ τὰ μʹ ἐπὶ τὰ μέ. καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια δεύτερα λεπτά. Et quoniam binarius ſubſeſquialter eſt ternarii; ternarius autem ſubſupertertius quaternarii; ſumo XL minuta, unitatis beſſem; & rurſus XLV minuta, unitatis tres quartas.*

Deinde duco XL in XLV; unde fiunt mille octingenta minuta ſecunda. Ex quibus quidem id perſpicitur, vere minutum eſſe iſtud minutorum inventum, quod in explicanda doctrina item minuta operoſe Scholiaſtes ille adhibuit. Cæterum illud verum eſt ex diviſione, quæ multiplicationi eſt adverſa, diviſo antecedente cujuſque rationis per ſuum conſequentem, numerum exurgere, quem illi *πηλικότητα λόγȣ, quantitatem rationis,* exhibere putant, qui per conſequentem multiplicatus, rurſus producat antecedentem; ſed nullum inventa hæc rationis antecedens magnitudo uſum præſtat, niſi unitatem, quæ illa methodo omnium rationum communis conſequens eſt, illi ſubjiciamus. Quare rationis duplæ quantitatem non exhibet numerus 2, ſed ratio $\frac{2}{1}$. nec ſextuplæ rationis quantitatem exhibet numerus ſenarius, ſed ratio $\frac{6}{1}$. Similiter rationis ſeſcuplæ quantitas non eſt numerus $1\frac{1}{2}$, quod Theo vult & Eutocius, omniumque juniorum mathematicorum filii, ſed numerus $1\frac{1}{2}$ ad 1 relatus; hoc eſt, in integris numeris ratio $\frac{3}{2}$, quæ propterea *πυθμὴν* fundus ſeſquialteræ rationis dicitur. Ita rationis duplæſuperquartæ, $\frac{9}{4}$, quantitatem non exhibet numerus $2\frac{1}{4}$ ſolus, ſed unà cum unitate; id eſt, in numeris integris duplæſuperquartæ rationis magnitudinem exhibet ratio fundana $\frac{9}{4}$, quâ, tanqvam communi menſura, rationis duplæſuperquartæ rationem duplam, triplam, quadruplam, ſeſquialteram, ſupertertiam, & cæteras ejus multiplas, aut ſuperparticulares, aut ſuperpertes, menſuramus. Quale enim menſuratum eſt, talis etiam menſura eſſe debet. Primus autem Nicomachus Geraſenus,

quantum quidem ex Mathematica antiquitate ſcitur, pravam hanc vocabuli πηλικότης interpretationem invenit; quem ſecuti ſunt Heronas, commentario in illius Arithmeticam Introductionem; Eutocius commentario in quartam propoſitionem ſecundi libri Archimedis de Sphæra & Cylindro; ſed peſſimum ejus uſum primus Theo monſtravit, falſum inde dogma fabricando, nempe rationem duplicari, & quovis numero multiplicari poſſe, duplicatâ, aut quovis numero multiplicatâ hac rationis quantitate ſeu denominatore, qui eſt ejuſdem rationis antecedens terminus ad unitatem relatus. Cum enim pag. 25. monſtrare vellet, rationem ſextuplam componi, ſeu addi, ex dupla & tripla; contrà ſextuplam ex duplicata tripla prodiiſſe dicit; additâ generali causâ, quod, ſi triplum alicujus duplicaverimus, exurgat ipſius ſextuplum. Verum quidem eſt, ternarium, rationis triplæ antecedentem, duplicatum fieri ſenarium; ſed falſam, illud quod triplum alicujus eſt, duplicatum fieri ſextuplum: hoc eſt, triplam rationem duplicatam fieri ſextuplam. De duplicata autem tripla ratione, & non de antecedente termino, nempe de ternario duplicato, iſta eſſe accipienda, docent verba relationem ſignificantia, duplum, triplum, ſextuplum; uti & tota demonſtratio, quæ de rationibus inſtituitur. Sic deinde ex triplicata dimidia ratione, id eſt, ſubduplâ, fieri dicit ſeſquialteram. Quia enim ſubduplæ rationis denominator, ſeu quantitas, ipſi eſt minutia $\frac{1}{2}$, hac triplicatâ exurgit rationis ſeſquialteræ quantitas, $1\frac{1}{2}$. ideoque ſubdupla ratio ter ſumta facit

rationem ſeſquialteram. Subduplam autem rationem, dimidiam quoqve vocavit Theo Smyrnæus pag. 127, *ἀπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἓν, καὶ ἀπὸ τȣ̃ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, διάστημα ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, λόγος δὲ ἕτερος· τῶν μὲν δύο πρὸς τὸ ἓν, διπλάσιος· τȣ̃ δὲ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, ἥμισυς. A binario ad unitatem, & ab unitate ad binarium, unum idemque eſt intervallum, ratio autem diverſa: binarii ad unitatem, dupla; unitatis ad binarium, dimidia.* Hanc de rationum quantitatibus, ſeu denominatoribus, multiplicandis Theonis doctrinam ſecuti ſunt Cardanus; Rodulphus Volumnius Spoletanus, diſputatione de proportione proportionum, quem toties laudat ut eximium hujus ſententiæ doctorem Clavius, commentariis in Euclidis Elementa. Clavium deinde, fortiſsimum hujus dogmatis propugnatorem, ſecuta eſt tota mathematicorum cohors ad noſtra uſque tempora. Hic autem ad decimam quinti libri definitionem ita commentatur. *Et ſi proportio 25 ad 1 dicitur duplicata proportionis quintuplæ, tamen decupla proportio eſt ejuſdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata ſit ſedecupla, ut hic patet, 16. 4. 1.* Poſtea trigecuplam dicit decuplæ eſſe triplam. Rurſus: *Proportio 3 ad 192 à 6$\frac{1}{4}$ denominata, dici non poteſt triplo major proportione ſubquadrupla, 3 ad 12: quia denominator $\frac{1}{4}$, triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$, ſed $\frac{3}{4}$. atque ita proportio ſubſeſquitertia dicetur tripla proportionis ſubquadruplæ; ſicut etiam, non proportio à 64 denominata, ſed proportio duodecupla, eſt proportionis quadruplæ tripla; propterea quod denominator 4 triplicatus non producit denominatorem 64, ſed 12.*

Paulo poſt: *Proportionem autem aliquam tum demum eſſe alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator hujus denominatoris duplus eſt, vel triplus, &c. ita ut proprotio decupla ſit dupla quintuplæ, & ſextupla ſit tripla duplæ, &c. oſtendemus ad finem libri IX. tractatumque eſt hoc argumentum copioſè à Rodulpho Volumnio, in Diſputatione de proportione proportionum. Nunc ſatis ſit, hoc ipſum communi hominum judicio ex ſenſibilibus rebus confirmare. Si igitur agens aliquod ad patiens proportionem habeat, verbi gratiâ, decuplam, ita ut agens ſit decem, & patiens unum; quis tam mente captus erit, qui non ſtatim intelligat, ſi idem agens augeatur, ut fiat viginti, patiens autem maneat unum, agens tunc duplo majorem habere potentiam reſpectu ejuſdem patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cujus denominator XX, duplus eſt denominatoris X, dupla eſt proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, ut auctores contrariæ ſententiæ volunt; ſed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ, propter multiplicationem denominatoris X in ſe, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interjiciuntur, ut hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiam ſi è contrario, agens aliquod ad patiens habeat proportionem, verbi gratia, ſubdecuplam, ita ut agens ſit I, & patiens X, quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, agens, quod ſit II, duplo eſſe potentius reſpectu ejuſdem patientis X, quàm agens I? Cum ergo agens II ad patiens X, habeat proportionem ſubquintuplam, cujus denominator $\frac{1}{5}$, vel $\frac{2}{10}$, conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$ bis ſumto, erit profectò proportio ſubquintupla proportionis ſubdecuplæ dupla, non autem illa, quæ ſubcentupla eſt, ut prædicti auctores*

volunt, cum hæc longe minor ſit quàm ſubdecupla. Dicetur tamen proportio ſubcentupla proportionis ſubdecuplæ duplicata, propter cauſam ſæpius explicatam, ut hic patet, 1. 10. 100. In eandem ſententiam ſcribit ad libri IX finem de proportionum compoſitione: *Huc accedit*, inquit, *quod ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, ut prædicti auctores volunt; quanquam noncupla proportio dicatur tripla duplicata, ut in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, ut III, illud idem duplo potentius factum eſſe ut VI, non autem ut IX? Sic etiam communis intelligentia comprehendit, ex proportione tripla & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo moventia, ut 3 & 5, moveant ſimul ſumta, ut 8. non autem ex illis conſtitui proportionem 15 ad 1. quamvis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur, ex definitione V libri VI. ut patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patientis exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia, agens ut 6, non poſſet habere agens duplo minus, quod inter 6 & 1 nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens ut 3, in dupla proportione minus eſſe quàm agens ut 6?* Ex his autem perſpicuum eſt, non tantùm ignoraſſe illos auctores, quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit ratio. Cum enim ratio à duabus magnitudinibus comprehendatur, uti linea à duobus terminis; planum eſt, duas rationes, quæ ex quatuor magnitudinibus, ſaltem potentiâ, conſtant, tum additas dici, cum utræque, una

media quantitate conjunctæ, extremis duabus magnitudinibus continentur: quemadmodum duæ lineæ, quæ quatuor terminos habent, compoſitæ dicuntur, cum unius inferior terminus factus eſt alterius terminus ſuperior; atque ita duæ lineæ in unam, duabus datis æqualem, coaluére. Uti autem eandem lineam & alii cuicunque lineæ, & ſibi ipſi, poſſum adjungere; ſic quoque rationem, & alii cuicunque rationi, & ſibi ipſi, quoties velim, adponere poſſum. Porro uti, exiſtentibus tribus lineis inter ſe æqualibus, compoſita ex duabus linea reliquæ dupla eſt; ſic expoſitis tribus rationibus æque magnis, compoſita ex duabus ratio reliquæ dupla exiſtit. Duplum enim communi ſententia omnes homines judicant, quod bis habet ſimplum; triplum, quod tria ſimpla æquat; centuplum, quod centum. Generalem autem quaſcunque rationes componendi methodum ex quinta definitione libri ſexti addiſcimus: at rationem ſibi adpoſitam, adeoqve duplicatam, cognoſcimus, cum datis duabus illius rationis magnitudinibus tertia proportionalis eſt inventa; triplicatam, cum tribus datis proportionalibus quarta proportionalis eſt adjuncta; & ſic deinceps. *Cum enim*, inquit quinti libri definitione decimâ, *tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam dicitur habere rationem duplam ejus quam habet ad ſecundam. At cum quatuor magnitudines proportionales ſunt, prima ad quartam dicitur habere rationem triplam ejus quam habet ad ſecundam.* Unde hoc conſequitur, primam ad quartam dici habere ſeſquialteram rationem ejus quam habet ad tertiam. &, cum quinque magnitudines pro-

portionales ſunt, primam ad quintam, ſupertertiam rationem habere ejus quam habet ad quartam. Porro ſi ſex magnitudines proportionales fuerint, prima ad ſextam ſuperquartam habet rationem ejus quam habet ad quintam: prima autem ad ſextam habet rationem ſuperbitertiam ejus quam habet ad quartam; ſeu, eſt ut 5 & 3: rurſus prima ad ſextam habet rationem dupliſuperdimidiam ejus quam habet ad tertiam. Scholiaſtes hujus definitionis, quem pag. 30 produxi, obſcure loquitur initio. His enim verbis: *Non dicit, duas rationes unius eſſe duplas; quod etiam verum:* non poteſt ſignificare; certe non debet; duas rationes Arithmeticè additas, unius eſſe duplas; ut ſi rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{3}{2}$ additæ, dicantur facere rationem $\frac{6}{2}$, quæ rationis $\frac{3}{2}$ ſit dupla: ſed hoc voluiſſe debet, duas rationes inæquales, ut $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{1}$, aut $\frac{12}{5}.\frac{5}{3}$, aut hujuſmodi duas alias, conjunctim duplas eſſe poſſe unius rationis, nempe ipſius $\frac{2}{1}$, quæ ipſarum eſt dimidia. Cæterum perinde eſt, ſive prima proportionis magnitudo major ſit, ſive minor: quamvis, ſi de rationum quantitate, quâ alia ſuperat aliam, quæratur, octavæ quinti falſitatem ex Euthymii doctrina evitare debeamus. Quare ex veterum ſententia, ut ratio quadrupla eſt duplæ rationis dupla; hoc eſt, ratio $\frac{4}{1}$ ad rationem $\frac{2}{1}$ eſt ut 2 ad 1: ſic ratio ſubquadrupla ſubduplæ eſt ſubdupla; id eſt, ratio $\frac{1}{4}$ ad rationem $\frac{1}{2}$ eſt ut 1 ad 2. Similiter ſubcentupla ratio ſubdecuplæ rationis eſt ſubdupla; ſeu, ut 1 ad 2, ſic $\frac{1}{100}$ ad $\frac{1}{10}$. Qua in re admodum ſe torſerunt Euclidis commentatores. Commandinus enim ad definitionem decimam; quam in binas ſecans decimam & unde-

cimam vocat; ita ſcribit. *Decima & undecima diffinitio terminos requirunt neceſſario inæquales, & primum ipſorum majorem. Nam ſi æquales ſint, eadem eſt primi ad ſecundum, & ad tertium proportio. Si verò primus ſit minor, non poteſt primus ad tertium duplam proportionem habere proprie ejus, quam habet ad ſecundum, cum primi ad ſecundum major ſit proportio quàm ad tertium, ex octava hujus.* Hæc Commandini verba Clavius inconcinna, & Euclidis ſententiæ adverſa judicavit. Primùm enim hoc in iis reprehendit, quod docere videantur, ſi tres numeri ſint proportionales, ut 9. 6. 4, primum ad tertium, 9 ad 4, revera duplam habere rationem ejus quam habet ad ſecundum, nempe 9 ad 6. quia ſcilicet in Euclidis verbis, διπλασίονα λόγον, vertit, *duplam rationem*, ipſa vocabuli perſpicua ſignificatione adactus; non autem, quod Clavius volebat, *duplicatam*. Probè autem vertit Commandinus; ſed & optime Euclidis, veterumqve omnium ſententiam explicavit, ſi, quam Clavius reprehendit, vere eſt amplexus: quoniam verò plura hac de re non ſcripſit, potuit idem ſenſiſſe, qvamvis non iiſdem verbis, quod Clavius; nempe rationem ⁏ duplam dici rationis ⁏, non autem revera eſſe; ſicuti parallelogrammum rectangulum, à duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt, contineri dicitur, quamvis revera non à ſolis duabus illis, ſed inſuper ab aliis duabus, æque magnis, adeoque à quatuor rectis, contineatur. Tantæ porro auctoritatis fuit hæc Clavii opinio, qui λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα, non, ut verba proprie & vere ſonant, *duplam, triplam rationem*, ſed *duplicatam, triplicatam*;

cum Franciſco Fluſſate Candalla, qui Campani verſionem ex Arabico idiomate factam, hîc ſecutus eſt; vertenda cenſuit, ut, qui Londini, anno cIↃ IↃ CXX, Euclidis Elementa Græce & Latine, elegantibus typis & figuris, & utcunque emendate, adeoque cum laude, edenda curavit, ubique pro *dupla*, *tripla*, reponendum curarit, *duplicata*, *triplicata*. quam deinde loquendi formulam omnes Mathematici uſurparunt. O ſtupendam Græcæ linguæ ignorantiam, atque erroris fœditatem, qua non vulgus Mathematicorum, ſed duces atque principes inclaruerunt! Deinde Commandinus à Clavio ob iſta verba reprehenditur, quod, dum in exceſsivis rationibus duplam, triplam admittit, in defectivis contrà ſtatuendum cenſet; eò quod ex octava quinti prima ad ſecundam, majorem rationem habet quàm ad tertiam. Clavius enim illam definitionem æque in defectivis rationibus veram cenſet atque in exceſsivis. Sed magno mentis errore uterque faſcinatus in re haud difficili explicanda cœcutiit. Quippe, uti antè dictum eſt, ratio $\frac{8}{27}$ rationis $\frac{8}{12}$ non eſt tripla, ſed ſubtripla; ſeu, ratio $\frac{8}{27}$ ad rationem $\frac{8}{12}$ eſt ex Euclidis ſententia, quam octava quinti tradidit, ut 1 ad 3, non autem, quod Commandinus & Clavius putarunt, ut 3 ad 1. Quare, ſecundum Euclidis doctrinam, prima ad ſecundam, 8 ad 12, majorem rationem habet quàm ad quartam, 8 ad 27; & ratio 8 ad 27 ſubtripla eſt rationis 8 ad 12: at ſequendo Euthymii doctrinam, ratio $\frac{8}{27}$ tripla dicitur rationis $\frac{8}{12}$, ſed hoc addito, quod ratio $\frac{8}{27}$ ſit defectiva. Clavius igitur omnibus locis; ad quinti definitionem decimam; ad ſexti quintam;

nonilibri adpendice, & ſcholio in duodecimi propoſitionem duodecimam; ubi exempli cauſa, rationem 1 ad 9, duplicatam vocat rationis 1 ad 3, corrigendus eſt, ut pro verbis, *duplicata, triplicata*, ſcribatur, *ſubdupla, ſubtripla*. Cæterum illud hinc planum eſt, rationum inter ſe eſſe rationem, quam propterea λόγων λόγον Græci adpellarunt; & quidem ſpeciebus; multiplis nempe, ſuperparticularibus, & cæteris; æque variam, atque ſit magnitudinum, & abſolutorum numerorum. Hanc autem ita finimus: *λόγος λόγων ἐστὶ δύο λόγων ταυτοῦ στίχου, ἀπὸ πυθμενικοῦ λόγου κατὰ φυσικοὺς ἀριθμοὺς προχωροῦντος, ἡ κατὰ λόγον πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις. Ratio rationum eſt duarum rationum ejuſdem ſeriei, à fundana ratione ſecundum naturales numeros progredientis, ſecundum rationem certa quadam inter ipſas relatio. Duarum rationum* dico, quod, uti ratio eſt duarum magnitudinum, ſecundum magnitudinem, inter ſe relatio; ſic rationum ratio ſit duarum rationum inter ſe relatio ſecundum rationem. Deinde addo, *ejuſdem ſeriei à fundana ratione progredientis.* quæ verba oppido ſunt notanda. Cum enim ratio aliqua alterius dupla, tripla, ſeſquialtera, dicitur; ratio fundana & ſimpla, ſecundum naturalem numerorum ſeriem excreviſſe; hoc eſt, continua ſui adpoſitione major facta, intelligitur. Uti enim, ſi unitati cuicunque unitatem addam, fit binarius; rurſus ſi binario eandem unitatem adponam, fit ternarius, & ſic deinceps: ita ſi quamcunque rationem ſibi ipſi adponam, inde fit ratio, prioris, nempe ſimplæ & fundanæ, dupla; ſi hanc duplam cum fundana componam, ratio fit fundanæ tripla; ſi triplæ primam

& fundanam addam, inde ſit fundanæ quadrupla. Tripla autem ad duplam eſt ut 3 ad 2; hoc eſt, in ratione ſeſquialtera; quadrupla ad triplam, in ratione ſupertertia. Porro uti quemcunque numerum, parvum, magnum, unitatis loco ponere poſſumus; ſic & quamcunque rationem, fundanæ & ſimplæ rationis, hoc eſt, unitatis loco collocamus. Unde innumeræ rationum progreſsiones exſurgunt. quarum ſeptem ad ſenarii quantitatem duntaxat adſcendentes, exemplorum loco in

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
I.	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$
II.	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{27}{1}$	$\frac{81}{1}$	$\frac{243}{1}$	$\frac{729}{1}$
III.	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{256}{1}$	$\frac{1024}{1}$	$\frac{4096}{1}$
IV.	$\frac{1}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{100}{1}$	$\frac{1000}{1}$	$\frac{10000}{1}$	$\frac{100000}{1}$	$\frac{1000000}{1}$
V.	$\frac{64}{64}$	$\frac{96}{64}$	$\frac{144}{64}$	$\frac{216}{64}$	$\frac{324}{64}$	$\frac{486}{64}$	$\frac{729}{64}$
VI.	$\frac{729}{729}$	$\frac{972}{729}$	$\frac{1296}{729}$	$\frac{1728}{729}$	$\frac{2304}{729}$	$\frac{3072}{729}$	$\frac{4096}{729}$
VII.	$\frac{262144}{262144}$	$\frac{294912}{262144}$	$\frac{331776}{262144}$	$\frac{373248}{262144}$	$\frac{419904}{262144}$	$\frac{472392}{262144}$	$\frac{531441}{262144}$

adjuncto diagrammate expoſui. Prima progreſsio eſt rationis duplæ. altera, triplæ. tertia, quadruplæ. quarta, decuplæ. quinta, ſeſquialteræ; quæ in minimis numeris ita adſcendit; $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \frac{729}{64}$. ſexta, ſupertertiæ; cujus fundanæ rationes ita excreſcunt; $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \frac{64}{27}, \frac{256}{81}, \frac{1024}{243}, \frac{4096}{729}$. ſeptima, ſuperoctavæ; quæ à minimis numeris ad majores ſic progreditur; $\frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{729}{512}, \frac{6561}{4096}, \frac{59049}{32768}, \frac{531441}{262144}$. Illud autem novè hîc obſervandum dicebat Euthymius, cujuſque ex his rationum progreſsionibus rationem cum ſuæ

ſeriei & progreſsionis ratione ſolùm comparari poſſe, ita ut ſciatur, quam rationem hæc ratio ad illam rationem, & viciſsim, obtineat. Ratio enim $\frac{64}{1}$, ſextupla eſt rationis $\frac{2}{1}$; ſuperquinta, rationis $\frac{32}{1}$, ſeu, ut 6 ad 5; ſeſquialtera rationis $\frac{16}{1}$; dupla rationis $\frac{8}{1}$; tripla rationis $\frac{4}{1}$. quæ omnes ejuſdem ſeriei rationes exiſtunt. Similiter ratio $\frac{81}{1}$ ſupertertia eſt rationis $\frac{27}{1}$; dupla rationis $\frac{9}{1}$; quadrupla rationis $\frac{3}{1}$; ſubſuperquarta rationis $\frac{243}{1}$, ſeu, ut 4 ad 5; ſubſeſquialtera rationis $\frac{729}{1}$: quæ item rationes omnes ejuſdem ſeriei & progreſsionis, triplæ nempe, reperiuntur. Eodem modo ratio $\frac{531441}{262144}$ ſextupla eſt rationis $\frac{294912}{262144}$; hoc eſt, in Harmonicis, ut ſex toni ſuperoctavi ad unum. atque ita ulterius ratiocinando. Nullo autem modo diverſæ progreſsionis rationes inter ſe comparari poſſunt, ut quam inter ſe rationem habeant, definiatur; quamvis illarum differentialis ratio ſit notiſsima. cujus cauſa rei naturam ſcrutanti obſcura eſſe nequit. Quare ratio $\frac{2}{1}$, quæ primæ ſeriei prima eſt, ineffabilem rationem habet non tantùm ad rationem $\frac{3}{1}$, quæ prima eſt ſeriei ſecundæ, ſed & ad omnes alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, & cæterarum in infinitum, rationes: differentialis autem ratio, quâ major $\frac{3}{1}$ ſuperat minorem $\frac{2}{1}$, eſt ratio $\frac{3}{2}$. Similiter ratio $\frac{2}{1}$, ſeu $\frac{8}{4}$, ineffabilem rationem habet ad rationem $\frac{144}{64}$, ſeu $\frac{9}{4}$: ſuperat autem ratio $\frac{9}{4}$ rationem $\frac{8}{4}$, ratione $\frac{9}{8}$. Hoc autem inde quoque evidens eſt, quod duas diverſarum progreſsionum rationes per quamcunque aliam minorem rationem menſuraturi, nullam plane invenire queamus, quæ utramque exacte metiatur. Si enim proponantur rationes $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$, quas ratione $\frac{81}{80}$ men-

ſurare velimus, inquiſitione facta, ut pag. 77 monſtratum eſt, hoc fieri non poſſe deprehendemus. Quippe ratio $\frac{2}{1}$ plus quinquagintaquinque rationes $\frac{81}{80}$, ſeu commata, continet; minus quinquagintaſex: ita ut rationis $\frac{2}{1}$ quantitas, ſecundum hanc menſuram inquiſita, exacte haberi nequeat, ſed inter 55 & 56 commata vagetur. Eâdem menſurâ adhibitâ rationem $\frac{3}{1}$ majorem inveniemus 88 commatis; minorem, 89. Harum autem rationum differentialis ratio $\frac{3}{2}$, major reperitur 32 commatis; minor, 33. qui quoque commatum numerus, ablatis 55 aut 56 ab 88, habetur. Similiter has diverſæ ſeriei rationes, $\frac{12}{4}$. $\frac{9}{4}$, ineffabilem inter ſe rationem habere inveniemus; quamvis proxime ad eam accedat, quæ eſt inter antecedentes, 12 & 9, id eſt, ad ſupertertiam. Ratio enim $\frac{12}{4}$, ſeu $\frac{3}{1}$, major eſt 88 commatis; minor, 89: & ratio $\frac{9}{4}$ major commatis 65; minor, 66. Sed æquet hæc 66 commata. Igitur, ut 3 ad 4, ita 66 ad 88. Atqui ratio $\frac{12}{4}$ major oſtenſa eſt commatis 88. Rurſus, contineat ratio $\frac{3}{1}$ tantùm 88 commata. Ergo ratio $\frac{9}{4}$ exacte habebit 66. Atqui pauciora continere monſtrata eſt; cum etiam plura continere deberet, quod ratio $\frac{3}{1}$ commatis 88 ſit major. Quare ratio $\frac{12}{4}$ ad rationem $\frac{9}{4}$ majorem rationem habet quàm ſupertertiam. Eadem ratiocinatione quaſcunque alias diverſæ ſeriei rationes, quacunque alia communi menſura menſuratas, ineffabilem inter ſe rationem habere cognoſcemus. Porro ratio $\frac{4}{1}$, quæ dupla eſt rationis $\frac{2}{1}$, bis tot commata habet, quot ſimpla $\frac{2}{1}$; ferme 112. Et ratio $\frac{9}{4}$, quæ rationis $\frac{3}{2}$ dupla eſt, commata prope habet 66, quæ dupla ſunt commatum 33.

Ratio autem $\frac{27}{8}$, quæ rationis $\frac{3}{2}$ tripla eſt, plus 97 commata continet, quæ item pluſquam tripla ſunt commatum 32. Planum itaque eſt, omnes diverſæ ſeriei, ſeu, non ab eadem fundana ratione adſcendentes, rationes, inter ſe eſſe incommenſurabiles. Deinde, rationis alicujus duplam, triplam, ſeſquialteram rationem in eadem rationum ſerie & progreſsione eſſe, in qua eſt ſimpla: quæ bis compoſita duplam exhibet; ter, triplam; & ſic deinceps. Cæterum rationem $\frac{6}{2}$ non eſſe rationis $\frac{3}{2}$ duplam; nec rationem $\frac{9}{2}$ ejuſdem triplam: item rationem $\frac{8}{3}$ non eſſe duplam rationis $\frac{4}{3}$; nec rationem $\frac{12}{3}$ ejuſdem triplam; & ſic conſequenter; duplici inſuper demonſtratione oſtendemus. Primâ, hoc adſumto lemmate: Duplorum duplos eſſe exceſſus: adeoque triplorum, triplos; ſeſquialterorum, ſeſquialteros. Quippe uti 4 & 2, binario inter ſe differunt; at illorum dupli, 8 & 4, quaternario; tripli, 12 & 6, ſenario; ſeſquialteri, 6 & 3, ternario, qui ſeſquialter eſt differentiæ ſimplorum, nempe binarii: ſic rationes $\frac{9}{1}$ & $\frac{4}{1}$, inter ſe differunt ratione $\frac{9}{4}$; harum duplæ, $\frac{81}{1}$ & $\frac{16}{1}$, ratione bis dupliſuperquarta, $\frac{81}{16}$, inter ſe diſtant; triplæ $\frac{729}{1}$ & $\frac{64}{1}$, ratione $\frac{729}{64}$, quæ eſt rationis $\frac{9}{4}$ tripla; ſeſquialteræ, $\frac{27}{1}$ & $\frac{8}{1}$, ratione $\frac{27}{8}$, quæ rationis $\frac{9}{4}$ eſt ſeſquialtera. Cum itaque ſimplarum rationum, $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, differentialis ratio ſit $\frac{9}{8}$; duplarum, $\frac{6}{2}$ & $\frac{8}{3}$, ſeu $\frac{18}{6}$ & $\frac{16}{6}$, differentialis ratio, erit ſimplæ differentialis rationis dupla, nempe $\frac{81}{64}$. Atqui eadem eſt, quæ ſimplarum, ſcilicet $\frac{18}{16}$, ſeu $\frac{9}{8}$ Quod eſt abſurdum. Ergo rationum $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, non ſunt duplæ rationes $\frac{6}{2}$ & $\frac{8}{3}$. Eodem modo monſtrabimus, rationes $\frac{9}{2}$ & $\frac{12}{3}$, ſeu $\frac{27}{6}$ & $\frac{24}{6}$, quæ eadem differentiali

ratione, qua ſimplæ, inter ſe diſtant, non eſſe ſimplarum, $\frac{3}{1}$ & $\frac{4}{3}$, triplas. & ſic de reliquis caſibus omnibus ratiocinando. Conſtat ergo propoſitum. Liquet autem, utrique eandem rationem eſſe additam; primùm duplam, in his terminis, 6.3.2. &, 8.4.3. deinde triplam, in terminis, 9.3.2. &, 12.4.3. qua de cauſa eadem differentialis ratio manet. Altera demonſtratione idem oſtendemus, hoc ſumto lemmate: Arithmeticæ progreſsionis numeros, quorum ſecundus primi duplus eſt, eodem exceſſu proximos binos ſe invicem ſuperare, quo primus ſuperat nihilum. Quippe eodem exceſſu, quo unitas ſuperat nihilum, binarius ſuperat unitatem, ternarius binarium, & ſic deinceps: aut, ſi binarium ponam unitatis loco in hac progreſsione; 0. 2. 4. 6. 8. binario proximi bini inter ſe diſtant. & ſic de cæteris progreſsionum exceſsibus argumentando. Cum itaque in hac rationum progreſsione, $\frac{32}{32}$. $\frac{48}{32}$. $\frac{96}{32}$. $\frac{144}{32}$. $\frac{192}{32}$. $\frac{240}{32}$. ſeu, quæ in minimis terminis eadem eſt; $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{6}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{12}{2}$. $\frac{15}{2}$. ratio $\frac{3}{2}$ ſimpla ſit, & unitatis loco ponatur, cujus dupla eſt $\frac{6}{2}$; tripla, $\frac{9}{2}$; quadrupla, $\frac{12}{2}$; quintupla $\frac{15}{2}$; continebit dupla $\frac{6}{2}$, ſeu $\frac{12}{4}$, bis ſimplam $\frac{3}{2}$, ſeu $\frac{9}{4}$. Atqui duæ ſimplæ $\frac{6}{4}$, additæ efficiunt rationem $\frac{9}{4}$, quæ minor eſt ratione $\frac{12}{4}$. Quare dupla ratio $\frac{12}{4}$ majore exceſſu ſuperat ſimplam $\frac{6}{4}$, quàm ſimpla ſuperat rationem nihili $\frac{4}{4}$. quod eſt contra adſumtum lemma. Non ergo ratio $\frac{12}{4}$ dupla eſt rationis $\frac{6}{4}$. Eodem modo monſtrabitur ratio $\frac{9}{2}$ major quàm tripla rationis $\frac{3}{2}$; & ratio $\frac{12}{2}$ major quàm quadrupla rationis $\frac{3}{2}$: at ratio $\frac{15}{2}$ minor quàm quintupla rationis $\frac{3}{2}$. Quod eſt abſurdum. Quare ratio $\frac{15}{2}$ non eſt quintupla rationis $\frac{3}{2}$. Cæterum in vera rationis ſeſqui-

alteræ progreſsione; $\frac{32}{32}$. $\frac{48}{32}$. $\frac{72}{32}$. $\frac{108}{32}$. $\frac{162}{32}$. $\frac{243}{32}$. ratio $\frac{243}{32}$, quinto loco poſita, eadem ratione ſuperat quarto loco poſitam rationem $\frac{162}{32}$, qua hæc ſuperat tertio loco poſitam rationem $\frac{108}{32}$; & qua ratio primo loco ſita, $\frac{48}{32}$ ſuperat rationem nihili $\frac{32}{32}$. Ergo quinto loco poſita ratio $\frac{243}{32}$, quintupla eſt rationis $\frac{48}{32}$, primo loco poſitæ. Quod monſtrare oportebat. Sed & idem ſic conficiemus. Quoniam ratio $\frac{9}{4}$, eadem ratione $\frac{9}{6}$, ſeu $\frac{6}{4}$, ſuperat rationem $\frac{6}{4}$, qua ratio $\frac{6}{4}$ ſuperat rationem nihili $\frac{4}{4}$; ratio autem $\frac{12}{4}$ ſuperat rationem $\frac{6}{4}$ ratione $\frac{12}{6}$, quæ major eſt ratione $\frac{9}{6}$; idcirco ratio $\frac{12}{4}$ major eſt quàm ut rationis $\frac{6}{4}$ tantùm ſit dupla. Sed & eadem ratio $\frac{12}{4}$ rationis $\frac{6}{4}$ ponebatur dupla. Eadem ergo ratio $\frac{12}{4}$, & dupla eſt rationis $\frac{6}{4}$, & major quàm dupla rationis $\frac{6}{4}$. Quod eſt abſurdum. Porro exceſſus, ſeu differentialis ratio, qua ratio ſecunda $\frac{6}{2}$, ſuperat primam $\frac{3}{2}$, eſt ratio $\frac{6}{3}$; major differentiali ratione $\frac{9}{6}$, ſeu $\frac{6}{4}$, quâ tertia ſuperat ſecundam; & hæc major differentiali ratione $\frac{12}{9}$, quâ quarta ratio ſuperat tertiam; & hæc denique major differentiali ratione $\frac{15}{12}$, quâ quinta ſuperat quartam: ita ut differentialis ratio inter proximas binas rationes; ſimiliter uti ratio inter naturalis progreſsionis proximos binos numeros; decreſcat. quod eſt contra ſumtum lemma, quo quinarius non majore numero quaternarium ſuperare dicitur quàm binarius unitatem. Unde ſequitur, ut in falſa rationis ſeſquialteræ progreſsione, dupla $\frac{12}{4}$ major ſit quàm vera dupla $\frac{9}{4}$; contrà autem in eadem falſa progreſsione, quintupla $\frac{15}{2}$, ſeu $\frac{240}{32}$, minor quàm vera quintupla $\frac{243}{32}$. Eandem hanc veritatem paucis ſic oſtendemus. Quoniam ratio $\frac{3}{2}$, ex

illorum ſententia, eſt ad rationem $\frac{4}{1}$, ut illius denominator 8, ad hujus denominatorem 4; ſeu, quod idem, ut 4 ad 2; habebit ratio $\frac{8}{1}$ hujuſmodi quatuor rationes, cujuſmodi duas habet ratio $\frac{4}{1}$. At ratio $\frac{4}{1}$ habet duas rationes duplas. Ergo ratio $\frac{8}{1}$ habebit duplas rationes quatuor. Quod eſt falſum. Habet enim duntaxat tres rationes duplas. Falſum ergo, rationem $\frac{8}{1}$ duplam eſſe rationis $\frac{4}{1}$. quippe ejuſdem tantùm monſtratur ſeſquialtera; quòd hujuſmodi tres rationes æquet, cujuſmodi duas ratio $\frac{4}{1}$. Similiter, ſi ratio $\frac{6}{1}$ ad rationem $\frac{4}{1}$ eſſet, ut illius denominator 6 ad hujus denominatorem 4; ſeu, ut 3 ad 2; haberet ratio $\frac{6}{1}$ hujuſmodi tres rationes, cujuſmodi duas habet ratio $\frac{4}{1}$. Sed ratio $\frac{4}{1}$ duas æquat rationes duplas. Ergo tres rationes duplas æquabit ratio $\frac{6}{1}$. Quod eſt abſurdum. Quippe ratio $\frac{6}{1}$ minor eſt ratione $\frac{8}{1}$, quam tres rationes duplas æquare monſtravimus. Eodem modo oſtendemus rationem $\frac{72}{16}$ ad rationem $\frac{54}{16}$ habere minorem rationem quàm antecedens 72 ad antecedentem 54, ſeu, 4 ad 3. Cum enim ratio $\frac{54}{16}$ æquet tres rationes ſeſquialteras; ratio $\frac{81}{16}$ æquabit hujuſmodi quatuor. Major autem eſt ratio $\frac{81}{16}$ quam ratio $\frac{72}{16}$. Conſtat igitur propoſitum. Harum autem demonſtrationum, quibus veram rationum compoſitionem oſtendimus, evidentiſſima exempla ſuppeditat Harmonice. Quoniam enim chorda novem palmorum tanta ſui parte ſuperat 6 palmorum chordam, quanta ſui parte hæc ſuperat chordam palmorum quatuor; ratio chordarum 9 & 4 palmorum, compoſita ex rationibus duabus $\frac{9}{6}$ & $\frac{6}{4}$ inter ſe æqualibus, dupla eſt unius ſimplarum, ipſius $\frac{9}{6}$, aut $\frac{6}{4}$. Quod ex di-

viſo canone Harmonico omnes, qui incorruptum aurium judicium adhibent, addiſcere poſſunt. Intervallum enim dia pente; quod quintam vulgo vocant; in ratione ſeſquialtera ſpectatur, & quinque ſonis in quolibet genere includitur: hujus autem duplum intervallum, quod in ratione biſſeſquialtera $\frac{9}{4}$ ſpectatur, novem ſonis continetur. Poſtquam enim dia pente intervallum, quinque ſonis à gravi in acumen adſcendentes, cecinerimus, alterum dia pente intervallum in acumen enitendo adponimus, acutiſsimum prioris dia pente ſonum, ſequentis dia pente intervalli graviſsimum faciendo. Similiter chordarum in ratione $\frac{2}{1}$ diviſarum ſoni dia paſon, ſeu octavæ, intervallo inter ſe diſtant; at bis dia paſon intervallo inſer ſe diſtant ſoni in ratione $\frac{4}{1}$; ter dia paſon, in ratione $\frac{8}{1}$. & ſic de quibuſcunque aliis rationum rationibus ex Harmonice definiendo. Eandem autem hanc veritatem in miſtis obtinere dicimus. Miſtum enim $\frac{9v}{4a}$ viribus duplum eſt miſti $\frac{9v}{6a}$; aut quod ipſi viribus æquale eſt, miſti $\frac{6v}{4a}$. Eſſe autem miſtum $\frac{9v}{6a}$ viribus æquale miſto $\frac{6v}{4a}$; aut miſto $\frac{12v}{8a}$; aut cuicunque alii miſto, cujus vinum aquæ ſeſquialterum eſt; facillime ita percipietur. Sint enim tres cyathi, quorum ſinguli tres contineant vini menſuras, & duas aquæ. Quare trium illorum cyathorum miſta viribus ſunt æqualia. Ergo & confuſa duorum ex iſtis cyathorum miſta, hoc eſt, $\frac{6v}{4a}$ quantitate quidem unius $\frac{3v}{2a}$ dupla erunt, at viribus ipſi æqualia. Rurſus trium cyathorum illorum miſta confuſa, hoc eſt, $\frac{9v}{6a}$, quantitate unius $\frac{3v}{2a}$ tripla erunt, ſed viribus ipſi æqualia. Æqualis ergo eſt ratio $\frac{3}{2}$ rationi $\frac{6}{4}$, &

rationi $\frac{9}{6}$. & ſic de pluribus cyathorum æqualibus miſtis confuſis ratiocinando. Cum ergo viribus duplum ſit miſtum $\frac{9v}{4a}$ miſti $\frac{9v}{6a}$, duplo majorum virium miſtum hauriet, ſi quis unam menſuram miſti $\frac{9v}{4a}$ biberit, quàm ſi biberet menſuram unam miſti $\frac{9v}{6a}$. hoc eſt, ſi miſtum $\frac{45v}{20a}$ biberit, duplo citius vini viribus juvabitur, quàm ſi biberet quantitate quidem æquale, ſed viribus ſubduplum miſtum $\frac{39v}{26a}$. Similiter triplo citius quis vini virtutem ſentiet hauriendo miſtum $\frac{40v}{5a}$, quàm ſi hauriat miſtum $\frac{30v}{15a}$; ſeſquialtero citius, quàm ſi hauriat miſtum $\frac{36v}{9a}$. Porro miſtum nihili nullam rationem ad quodcunque aliud miſtum habet. Neque enim miſtum $\frac{4v}{2a}$ duplum eſt miſti $\frac{3v}{3a}$, quamvis duplæ rationis viribus hoc ab illo ſuperetur. Aliud autem eſt rationem, aut miſtum alterius eſſe duplum; &, miſtum duplæ rationis viribus ſuperare aliud miſtum. Uti enim binarius, licet ſui magnitudine ſuperet ſiphram, non tamen dici poteſt, ſiphræ duplus; ſic ratio $\frac{4}{2}$, quamvis ſui magnitudine ſuperet rationem $\frac{3}{3}$, tamen dupla hujus dici nequit. Eodem modo miſtum $\frac{6v}{4a}$ ſeſquialtera ratione ſuperat miſtũ $\frac{5v}{5a}$; ſed illa hujus ſeſquialtera dici nequit. quod ex ſuperius demonſtratis eſt perſpicuum. Hinc autem illud planum eſt, rationem duplam dici, ob quantitatem; quod antecedens duplo major ſit conſequente: rationem autem rationis duplam in miſtis vocari, ob vires. Antiquorum autem nullus, quod Euthymius mirari ſolet, ad utiliſsimam hanc de miſtorum viribus in data ratione augendis, aut minuendis, contemplationem acceſsit, ut quouſque in his progredi poſsimus, determinaret. In magnitudine autem

& numero has loquendi formulas uſurparunt, ut ex Euclide, Archimede, aliiſque antiquis cognoſcimus. In figura igitur pag. 112, quoniam quadratum *adγa* ſeſquialterum eſt octanguli *MΓuxtzso*; & hoc octangulum ſeſquialterum quadrati *Muts*; rurſus hoc quadratum ſeſquialterum octanguli *HpLqmrno*; & hoc octangulum ſeſquialterum quadrati *HLmn*; adeoque quinque hîc ſunt figuræ ſeſquialtera ratione creſcentes, in his numeris, 81. 54. 36. 24. 16. ratio primæ ad quintam quadrupla eſt rationis primæ ad ſecundam; ſeu, quæ eadem eſt, tertiæ ad quartam, aut quartæ ad quintam: ratio autem primæ ad quintam ſupertertia eſt rationis ſecundæ ad quintam. Rurſus ratio ſecundæ figuræ ad quintam ſeſquialtera eſt rationis tertiæ ad quintam. & ſic de cæteris rationum rationibus definiendo. Atque hinc, quid rationum proportio ſit, non difficulter elicimus. nempe *ἀναλογία λόγων ἐςὶ λόγων λόγου ἰσότης. Proportio rationum eſt rationis rationum æqualitas.* Ut $\frac{64}{1}$ ad $\frac{8}{1}$, ita $\frac{16}{1}$ ad $\frac{4}{1}$, & $\frac{4}{1}$ ad $\frac{2}{1}$. Similiter, ut $\frac{729}{64}$ ad $\frac{81}{16}$, ita $\frac{27}{8}$ ad $\frac{9}{4}$. Æqualitatem rationum rationis dico, non ſimilitudinem, quamvis hoc vocabuli in proportionis definitione uſurparit Euclides. Male autem Theo Smyrnæus ſimplicem numerorum proportionem; quod ex ſubjuncto exemplo videre eſt; definiit his verbis: *Ἀναλογία δέ ἐςι λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις· οἷον, ὡς δύο πρὸς ἓν, οὕτως ὀκτὼ πρὸς τέσσαρα. Proportio eſt rationum inter ſe certa relatio: nempe, ut duo ad unum, ſic octo ad quatuor.* Proportio enim, ſeu analogia, eſt rationum æqualitas, non autem certa quædam inter ipſas relatio, quæ vel multipla eſſe poſsit, vel ſuper-

particularis, vel ſuperpers. quam definitionem ex ipſo analogiæ vocabulo addiſcimus. Analogia enim, ſeu proportio, eſt, cum, ut prima ad ſecundam, *ἀνὰ λόγον τὸν αὐτὸν, ſecundum eandem rationem*, fuerit ſecunda ad tertiam, tertia ad quartam, quarta ad quintam; & ſic deinceps, quouſque proportio excreverit. Itaque omnium optime proportionem Ariſtoteles finivit rationum æqualitatem. Verba illius ex V^to^ Ethicorum Nicomachiorum adponam.

Proportio eſt rationum æqualitas, & in quatuor pauciſſimis. Et quidem proportio diſcreta quod in quatuor conſiſtat, manifeſtum; ſed & continua. uno enim termino, tanquam duobus, utitur, & bis eum nominat: nempe, ut I.^mi^ termini quantitas ad quantitatem II.^di^; ita II.^di^ ad III.^tii^: bis quippe II.^di^ termini quantitas eſt nominata. ideoque ſi II.^di^ termini quantitas bis ponatur, quatuor erunt proportionalia.

Ἡ ἀναλογία ἰσότης ἐϛὶ λόγου, καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίϛοις. ἡ μὲν οὖν διῃρημένη, ὅτι ἐν τέτταρσι, δῆλον. ἀλλὰ καὶ ἡ συνεχής. τῷ γὰρ ἑνὶ ὡς δυσὶ χρήσεται, (melius χρῆται) καὶ δὶς λέγει· οἷον, ὡς ἡ τοῦ α΄ πρὸς τὴν τοῦ β΄, ἡ τοῦ β΄ πρὸς τὴν τοῦ γ΄. δὶς οὖν ἡ τοῦ β΄ εἴρηται. ὥστε ἂν ἡ τοῦ β΄ τεθῇ δὶς, τέτταρα ἔσαι τὰ ἀνάλογα.

Michaël Epheſius, commentario in hunc locum, putat Ariſtotelem *æqualitatem* dixiſſe pro *ſimilitudinem*: dubio procul Euclidis auctoritate motus, qui hoc vocabuli in proportionis definitione adhibuit. Contrà autem Euthymius vocabulum *ὁμοιότης, ſimilitudo*, inconcinnum in hac definitione arbitratur: quod ad ſimiles figuras reſpiciendo, in quibus proportio in Geometricis reperitur, Euclides uſurpavit. Uti enim binario bina-

rius æqualis dicitur, non autem ſimilis; ſic, ſi proportio fuerit, ratio prima rationi ſecundæ, & tertiæ, & cæteris deinceps, æqualis, non autem ſimilis dicetur. quod ſimilitudo plerunque in inæqualibus conſideretur. Nec movet Euthymium auctoritas Nicomachi Geraſeni, Pythagorici celeberrimi, qui libro ſecundo Arithmeticæ Introductionis; in quam certatim Heronas, Jamblichus, Aſclepius, commentarios ediderunt; rationem ſecundam primæ ſimilem nominat, non autem æqualem. Verba ejus, quæ quid ratio ſit, quid proportio, egregie aliàs docent, adſcribam.

Ἀναλογία κυρίως ἐςὶ δυοῖν, ἢ πλειόνων λόγων σύλληψις εἰς τὸ αὐτό. κοινότερον δὲ, δυοῖν, ἢ πλειόνων σχέσεων· κἂν μὴ λόγῳ τῷ αὐτῷ ὑποτάσσωνται, διαφορᾷ δὲ, ἤ τινι ἑτέρῳ· λόγος μὲν οὖν ἐςι δύο ὅρων ἡ πρὸς ἀλλήλους σχέσις. σύνθεσις δὲ τῶν τοιούτων, ἡ ἀναλογία. ὥς τε ἐν ἐλαχίςοις ὅροις τρισὶν αὕτη συμμέμικται. δύναται γε μὴν καὶ ἐν πλείοσι κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον προχωρεῖν. οἷον, τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸν δύο λόγος ἐςὶ, δύο ὅρων ὑπαρχόντων, εἷς, ὁ διπλάσιος· ἀλλὰ καὶ τοῦ β' πρὸς τὸν δ', ἕτερος λόγος ὅμοιος· ἀναλογία ἄρα ἡ α'. β'. δ'. λόγων γὰρ σύλληψις, ἢ ὅρων τριῶν, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον θεωρουμένων πρὸς ἀλλήλους.

Proportio propriè eſt duarum, pluriumve rationum collectio ad unum. Communius autem, duarum, aut plurium relationum; quamvis non eidem rationi, ſed aut differentiæ, aut alicui alii, ſubjiciantur. Ratio igitur eſt duorum terminorum inter ſe relatio; compoſitio autẽ hujuſmodi rationum, proportio. Itaque in pauciſſimis tribus terminis hæc commiſta eſt. quippe & in pluribus ſecundum eandem rationem progredi poteſt. ut, I ad II ratio eſt, duobus terminis exiſtentibus, una, nempe dupla; ſed & II ad IV eſt alia ratio ſimilis. Proportio igitur eſt, I. II. IV. quippe rationũ comprehenſio ſeu trium terminorum, in eadẽ ratione inter ſe ſpectatorum.

Voculas εἰς τὸ ἀυτὸ, quæ Boëthius vertit, *ad unum*; quamvis nec deinde repetitas videam, nec ab Aſclepio agnitas, ut inſertæ videri poſſint; ita additas puto, ut denotent, proportionem non eſſe quarumvis duarum rationum conjunctionem, ſed illarum, quæ à numeris, in uno rationum genere, ordine progredientibus, comprehenduntur. Proportio igitur continua his voculis denotari videtur; ut quæ in numeris, 4. 2. 1. aut, 1. 2. 4. &, 27. 18. 12. 8. non autem quæ in numeris, 8. 4. 3. 2. 4. aut diſcreta, 27. 12. 18. 8. Hoc igitur vult, proportionem eſſe quotvis rationum conjunctionem, nempe æque magnarum, quarum ſimpla & fundana ratio minimis terminis includitur; ſive illa dupla ſit, ſive ſeſquialtera, aut quævis alia. At ſi aliæ quævis rationes inæquales conjungantur, uti $\frac{6}{4}$ & $\frac{4}{3}$, in terminis 6. 4. 3, proportio in iis nulla invenietur. Porro verbum συμμέμικται, *commiſta eſt*, Aſclepius explicat, συνημμένη γίνεται, *fit continua.* Quod ſi idem dici poteſt, quod ejuſdem cum alio magnitudinis exiſtit, Proclus in Politiam Platonis pag. 431 recte pronunciavit: λόγου ἐστὶν ἀναλογία ταυτότης, καὶ δεσμῶν ὁ κάλλιστος. *Proportio eſt rationis identitas, & vinculorum pulcherrimum.* Theo Smyrnæus pag. 128, Euclidis & Procli vocabula conjunxit. Ἀναλογία ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης, ἢ ταυτότης, τουτέστιν, ἐν πλείοσιν ὅροις λόγων ὁμοιότης. *Proportio eſt plurium rationum ſimilitudo, ſeu identitas; hoc eſt, in pluribus terminis rationum ſimilitudo.* Pappi, aliorumque veterum proportionis definitiones, ne longior ſim, prætereo. Novam dediſſe videtur Ariſtides Quintilianus, Muſicæ libro III. pag. 120. Ἡ γεωμετρικὴ τὰς ἴσας

ὑπεροχὰς κἀν τοῖς λόγοις πρὸς ἀλλήλως, ἅσπερ κἀπὶ τῶν ὅρων συνίστησι. Geometrica proportio æquales exceſſus & in rationibus inter ſe comparatis ſervat, quos & in terminis conſtituit. Quod quidem in proportione continua veritati eſt conſonum. quippe rationis $\frac{9}{6}$ terminorum quantitas, 15, eodem exceſſu ſuperat rationis $\frac{6}{4}$ terminorum quantitatem, 10, quo terminus 9 ſuperat terminum 4. utrobique enim exceſſus eſt 5. Neque verò; quæ eſt Nicomachi, ut & Pappi, altera definitio; hoc iis verbis innuere potuit, primæ rationis exceſſum eſſe ad exceſſum rationis ſecundæ, ut primus terminus ad ſecundum. Cæterum recte Euclides proportionem in tribus terminis paucisſimis conſiſtere dixit, qui potentiâ quatuor exiſtunt, quod medius bis nominetur. Vocabulum autem *ἐλαχίςοις*, hîc, uti & in Ariſtotele, Nicomacho, Theone Smyrnæo, aliis, vertendum, *paucisſimis.* quod interpretes non obſervarunt. Sed ut ad propoſitum narrando revertar, rationum proportio ea eſt quam dixi: nempe ejuſdem progreſsionis rationum, rationis æqualitas. Diverſarum tamen progreſsionum rationes inter ſe comparari poſſunt, ſed abſque ullo uſu, & contemplationis concinnitate. Uti enim in duplæ rationis ſerie ratio $\frac{4}{1}$ dupla eſt rationis $\frac{2}{1}$, aut $\frac{64}{1}$ ipſius $\frac{8}{1}$; ſic in triplæ rationis progreſsione ratio $\frac{81}{1}$ dupla eſt rationis $\frac{9}{1}$, & hæc dupla ipſius $\frac{3}{1}$: in ſeſquialteræ rationis ſerie, ratio $\frac{81}{16}$ dupla eſt rationis $\frac{9}{4}$, & hæc ipſius $\frac{3}{2}$. Grandi igitur paralogiſmo lapſus eſt Gregorius à S.^to Vincentio, qui Clavii de denominatoribus doctrinam ſecutus, rationum proportionem in hujuſmodi numeris conſtituit, ut $\frac{8}{1}$ ad $\frac{4}{1}$,

ita $\frac{6}{2}$ ad $\frac{3}{2}$: aut permutando, ut $\frac{8}{2}$ ad $\frac{6}{2}$, ita $\frac{4}{2}$ ad $\frac{3}{2}$. Neque enim; quod ſuperius demonſtravi; quemadmodum rationis $\frac{4}{2}$ dupla eſt ratio $\frac{8}{2}$, ſic rationis $\frac{3}{2}$ dupla exiſtit ratio $\frac{6}{2}$; ſed longè hæc major eſt quàm illius dupla. Rurſus ratio $\frac{8}{2}$ plus quatuor continet hujuſmodi rationes, cujuſmodi tres continet ratio $\frac{6}{2}$: ut & ratio $\frac{4}{2}$ relata ad rationem $\frac{3}{2}$. quod etiam ex commatum tabula confirmavi. Superat autem ratio $\frac{8}{2}$ rationem $\frac{4}{2}$ eadem ratione, qua ratio $\frac{6}{2}$ rationem $\frac{3}{2}$; nempe ratione $\frac{2}{1}$. Similiter ratio $\frac{8}{2}$ ſuperat rationem $\frac{6}{2}$, ratione $\frac{8}{6}$; quâ etiam ratio $\frac{4}{2}$ ſuperat rationem $\frac{3}{2}$. Quare de differentiali ratione, qua altera ſuperat alteram, illæ ratiocinationes veræ ſunt. ſed hoc eſt contra ipſius propoſitum, qui rationum proportionem demonſtrare conatur. Dicit enim rationem $\frac{8}{2}$ ita ſe habere, ſeu eam habere rationem ad rationem $\frac{6}{2}$, quam rationem habet ratio $\frac{4}{2}$ ad rationem $\frac{3}{2}$: non autem ita loquitur; rationem $\frac{8}{2}$ eadem differentiali ratione ſuperare rationem $\frac{6}{2}$, qua differentiali ratione ratio $\frac{4}{2}$ ſuperat rationem $\frac{3}{2}$. hoc enim & verum eſt, & perceptu facile. Nec quidquam ad rem, quod in hac, ut ita loquar, differentiali Gregorii rationum proportione, duarum mediarum rationum termini inter ſe multiplicati; hoc eſt, antecedentes inter ſe, ut & conſequentes; eoſdem numeros producant, quos rationum extremarum termini inter ſe multiplicati; utrobique enim in propoſito exemplo conſurgit ratio $\frac{24}{4}$, nempe ſextupla: quoniam, quod ex ſuprà demonſtratis liquet, hac multiplicatione binæ ac binæ rationes æquales adduntur. Quippe uti ratio $\frac{8}{2}$ dupla ratione ſuperat rationem $\frac{4}{2}$; ſic viciſſim ratio $\frac{6}{2}$ du-

pla ratione ſuperat rationem ⁚. Attamen, inquiebat Euthymius, ut enormem hanc Gregorii hallucinationem illuſtriorem reddam, unum locum, quem in tota Mathematica antiquitate invenire potui, iſti ſuffragaturum, hîc ex MS.^to noſtro codice ſum producturus.

PTOLEMÆUS HARMONICORUM LIB. I. CAP. VI. FINE.

ΤΟ δὲ δὶς διὰ πασῶν οὕτως ἔχει πρὸς τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν τουτέστιν, ὁ τετραπλάσιος λόγος πρὸς τὸν τριπλάσιον· ὡς μόνον τὸ διὰ πασῶν πρὸς μόνον τὸ διὰ πέντε· τουτέστιν, ὁ διπλάσιος λόγος πρὸς τὸν ἡμιόλιον. ἐὰν γὰρ ἑνὸς ἀριθμοῦ ληφθῶσι τριπλάσιός τε καὶ τετραπλάσιος· καὶ πάλιν ἡμιόλιός τε καὶ διπλάσιος· ἐπίτριτον ποιοῦσι λόγον ὅ, τε τετραπλάσιος πρὸς τὸν τριπλάσιον, καὶ ὁ διπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ὥς τε ὅσῳ συμφωνότερόν ἐστι τὸ διὰ πασῶν τοῦ διὰ πέντε, τοσούτῳ συμφωνότερον γίνεσθαι καὶ τὸ δὶς διὰ πασῶν τοῦ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε.

BIs dia paſon conſonantia ita ſe habet ad dia pente & dia paſon; hoc eſt, quadrupla ratio ad triplam: ut ſola dia paſon ad ſolam dia pente; id eſt, dupla ratio ad ſeſquialteram. Si enim unius & ejuſdem numeri ſumantur triplus & quadruplus; & rurſus ſeſquialter & duplus; ſupertertiam rationem faciunt & quadruplus ad triplum, & duplus ad ſeſquialterum. adeo ut, quanto conſonantior eſt dia paſon conſonantia ipsâ dia pente, tanto ſit conſonantior bis dia paſon, ipsâ dia paſon & dia pente.

ΠΟΡΦΥΡΙΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ.

ΠΡὸς δὲ τὴν τούτων σαφήνειαν λαμβάνεται θεώρημά τι τοιοῦτον. Ἐὰν ἑνὸς ἀριθμοῦ ὁ μέν τις ἀριθμὸς ᾖ τετραπλάσιος, ὁ δὲ τριπλάσιος· καὶ ἔτι τοῦ αὐτοῦ ὁ μὲν διπλάσιος, ὁ δὲ ἡμιόλιος·

PORPHYRII COMMENTARIUS.

UT hæc plana fiant, ſumitur hujuſmodi aliquod theorema. Si unius numeri, alius quis numerus ſit quadruplus, alius triplus; denuo ejuſdem alius duplus, alius ſeſquialter:

exceſſus quadrupli ſupra triplum, ſupertertiam faciens rationem, idem erit exceſſui dupli ſupra ſeſquialterum. eſt enim & ipſa in ratione ſupertertiâ. Ut, numeri II ſit quadruplus VIII; triplus verò VI: & rurſus, binarii duplus quidem ipſe IV; ſeſquialter verò III. Si igitur à ratione, VIII ad II, quadruplâ, auferamus rationum ipſius VI ad II, triplam, relinquitur ratio ipſius VIII ad VI. Et rurſus, ſi à ratione ipſius IV ad II, quæ dupla eſt, auferamus rationem ipſius III ad II, ſeſquialteram, relinquitur ratio quaternarii ad ternarium, eadem quæ ante. Sunt enim ambæ ſupertertiæ. Quare, quam rationem habet duplus ad ſeſquialterum, id eſt, quaternarius ad ternarium; eandem habet rationem quadruplus ad triplum. quo enim ſuperat quadruplus triplum, hoc duplus ſuperat ſeſquialterum. Etenim duplicatus ſeſquialter facit triplum; & duplus, quadruplum. ideoque eandem rationem habét quadruplus ad duplum, quam triplus ad ſeſquialterum.

ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραπλασίου πρὸς τὸν τριπλάσιον, ἐπίτριτον ποιοῦσα λόγον, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ὑπεροχῇ τοῦ διπλασίου πρὸς τὸν ἡμιόλιον. ἔστι γὰρ αὐτὴ ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ. οἷον, τοῦ β΄ ἀριθμοῦ ἔστω τετραπλάσιος μὲν ὁ η΄, τριπλάσιος δὲ ὁ ϛ΄· καὶ πάλιν τοῦ δύο διπλάσιος μὲν ὁ δ΄, ἡμιόλιος δὲ ὁ γ΄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ η΄ πρὸς τὰ δύο, λόγου ὄντος τετραπλασίου, ἀφέλωμεν τὸν τῶν ϛ΄ πρὸς τὰ β΄ λόγον, ὄντα τριπλάσιον, λείπεται λόγος τῶν η΄ πρὸς τὰ ϛ΄. καὶ πάλιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δ΄ πρὸς τὰ β΄ λόγου, ὄντος διπλασίου, ἀφέλωμεν τὸν τῶν γ΄ πρὸς τὰ β΄ λόγον, ἡμιόλιον ὄντα, λείπεται λόγος ὁ τῶν τεσσάρων πρὸς τὰ τρία, ὁ αὐτός· εἰσὶ γὰρ ἄμφω ἐπίτριτοι. ὥστε ὃν ἔχει ὁ διπλάσιος λόγον πρὸς τὸν ἡμιόλιον, τουτέστι, τὰ δ΄ πρὸς τὰ τρία, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὁ τετραπλάσιος πρὸς τὸν τριπλάσιον. ᾧ γὰρ ὑπερέχει ὁ τετραπλάσιος τοῦ τριπλασίου, τούτῳ ὑπερέχει ὁ διπλάσιος τοῦ ἡμιολίου. καὶ γὰρ διπλασιασθεὶς ὁ μὲν ἡμιόλιος, τὸν τριπλάσιον ποιεῖ· ὁ δὲ διπλάσιος, τὸν τετραπλάσιον. καὶ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχει ὁ τετραπλάσιος πρὸς τὸν διπλάσιον, καὶ ὁ τριπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον.

Prima verba Ptolemæi falſa ſunt, ſi vocabula, *ὅτως ἔχει, ita ſe habet*, vulgari modo accipiantur, nempe pro, *τὸν ἀυτὸν ἔχει λόγον, eandem habet rationem:* de differentiali autem ratione, quemadmodum Gregorius illam locutionem male uſurpavit, ſunt accipienda. Verum enim eſt, quod hac ratiocinatione colligit Ptolemæus, conſonantiam ipſius bis dia paſon eo concentus gratioris exceſſu ſuperare, ſeu, tanto eſſe gratiorem conſonantiâ ipſius dia paſon & dia pente, quanto gratior eſt conſonantia dia paſon, conſonantiâ ipſius dia pente: quia eadem ratione, qua ratio $\frac{4}{2}$ ſuperat rationem $\frac{3}{2}$, ratio $\frac{8}{2}$ ſuperat rationem $\frac{6}{2}$. Sed ipſum nunc catalogum falſarum Gregorii propoſitionum; quas ob majorem evidentiam numeris expoſuit Euthymius; vobis examinandum, cum lubuerit, exhibebo.

Libro VIII.^vo^ paginâ 868. hæc eſt definitio II. *Rationum denominatores voco quantitates, quæ mutua habitudine ſua exponunt qualis ipſas inter rationes proportio intercedat.* cui hanc explicationem ſubjungit. *Datæ ſint rationes A ad B, C ad D, & ſint totidem lineæ, E & F, quarum ratio exprimat proportionem rationis A B ad rationem C D; hoc eſt, ſit quemadmodum linea E ad lineam F, ita ratio A B ad rationem C D: has lineas, E nimirum & F, datarum rationum denominatores appellabimus.* Hæc ita cenſuit Euthymius. Demonſtratum eſt ſuperiùs, ejuſdem duntaxat progreſsionis rationes inter ſe eſſe ut lineam ad lineam. Cum enim, in duplæ rationis progreſsione, ratio $\frac{4}{1}$ dupla ſit rationis $\frac{2}{1}$, erit; ut $\frac{4}{1}$ ad $\frac{2}{1}$, ita 2 ad 1: item, ut $\frac{16}{1}$ ad $\frac{4}{1}$, ita 2 ad 1, ſeu 4 ad 2. Ideoque, ut $\frac{16}{1}$ ad $\frac{4}{1}$, ita $\frac{4}{1}$ ad $\frac{2}{1}$;

ſeu, ut 4 ad 2, ita 2 ad 1. Quod ſi binarum extremarum, ut & binarum mediarum, rationum terminos inter ſe multiplicemus, binas extremas rationes addemus, & binas medias. Binæ autem extremæ rationes compoſitæ, majores ſunt quàm conjunctæ binæ mediæ: ſicut numeri 4 & 1 additi, majores ſunt quàm additi 2 & 2: hoc eſt, 5 major quàm 4. Similiter, cum in ſeſquialteræ rationis ſerie, ratio $\frac{9}{4}$ dupla ſit rationis $\frac{6}{4}$, erit; ut $\frac{9}{4}$ ad $\frac{6}{4}$, ita 2 ad 1: item, ut $\frac{81}{16}$ ad $\frac{9}{4}$, ita 2 ad 1, ſeu 4 ad 2. Ergo ut $\frac{81}{16}$ ad $\frac{9}{4}$, ita $\frac{9}{4}$ ad $\frac{6}{4}$; ſeu, ut $\frac{81}{16}$ ad $\frac{36}{16}$, ita $\frac{36}{16}$ ad $\frac{24}{16}$; hoc eſt, ut 4 ad 2, ita 2 ad 1. Quarum rationum binæ extremæ conjunctæ, ſimpla ratione ſuperant conjunctas duas medias. Et cum innumeræ ſint ſimplarum rationum progreſsiones; innumeræ quoque erunt rationes, quæ inter ſe ſint in ratione dupla, tripla, quadrupla, ſeſquialtera, ſupertertia, & in cæteris rationum ſpeciebus: ita tamen, ut binæ ejuſdem progreſsionis rationes inter ſe comparentur; & ex quatuor, ſaltem potentiâ, ejuſdem ſeriei rationibus proportio conſiſtat. Gregorius itaque & in eo peccat, quod quaſcunque duas rationes effabilem inter ſe rationem habere ſtatuit; nempe, rationem $\frac{8}{3}$ eſſe ad rationem $\frac{8}{6}$, ut hujus conſequens 6 ad illius conſequentem 3. Deinde, quod rationem $\frac{9}{4}$ ad rationem $\frac{6}{4}$ eam habere rationem putat, quam antecedens 9 ad antecedentem 6, hoc eſt, ſeſquialteram; cum, ex omnium quoque veterum vera ſententia, illa ſit hujus dupla. quemadmodum duo dia pente intervalla unius dia pente intervalli dupla exiſtunt. De exceſſu autem, ſeu differentiali ratione, utrumque illud verum. Nam &

ratio $\frac{8}{3}$ ſuperat rationem $\frac{8}{6}$, ratione $\frac{6}{3}$; & ratio $\frac{9}{4}$ ſuperat rationem $\frac{6}{4}$, ratione $\frac{9}{6}$. Hæc Euthymii doctrina, & demonſtrationibus, & exemplis, ſuprà eſt confirmata. Falſa igitur eſt hæc Gregorii definitio ſecunda; quod aut nullæ quantitates, hoc eſt, denominatores, in rerum natura reperiantur, quæ rationem inter datas rationes exprimant; aut non hujuſmodi, cujuſmodi cenſet Gregorius. Paginâ 872. falſa ſunt ſequentia. *Cæterùm duplex modus aſsignari poteſt componendi rationes, qui uterque uſitatus eſt in Geometricis. Primus, quo linea trium, exempli gratiâ, palmorum dicitur compoſita ex tribus palmis. Secundus, quo quadratum, quod aream novem palmorum complectitur, perhibetur compoſitum ex multiplicatione longitudinis trium palmorum in tres palmos latitudinis: atque hi duo modi ita inter ſe differunt, quemadmodum diſcrepant inter ſe additio & multiplicatio. Uterque horum modorum etiam rationibus convenit. Nam ſi quis tres rationes in medium adducat; duplam nimirum, triplam & quadruplam; & aliam requirat quæ his tribus æqualis exiſtat, ortam ex ſola additione inter ſe datarum rationum; illi ſatisfiet, ſi trium harum rationum denominatores in unam ſummam addantur: quo pacto ratio noncupla emerget. Quod ſi autem rationem requirat reſultantem ex multiplicatione harum rationum, inveniet longe diverſam ab ea quæ per additionem producitur. denominator enim primæ rationis harum trium qui eſt duo, ductus in denominatorem ſecundæ, ſcilicet tria, producet ſextuplam rationem; cujus denuo denominator ſex, ductus in denominatorem quatuor, tertiæ harum trium, exhibebit rationem vigeſies quadruplam; quæ longe alia eſt ab ea quæ per ſolam additionem earundem trium*

rationum eſt producta. Verum definitio præſens (V.ta libri VI.ti) *quam ex elementis Euclidis attulimus, de additione intelligenda non eſt, ſed de ſola multiplicatione. quod manifeſtè patet ex ipſis verbis quibus auctor utitur, aſſerens quantitates rationum inter ſe debere multiplicari, & rationem ex hac multiplicatione reſultantem appellat compoſitam ex rationibus iis, ſcilicet ſecundum quas multiplicatio facta eſt.* Pag. 873. *Significant autem hæ formulæ loquendi, ut ex ipſis nominibus manifeſtum eſt, rationes has, ſcilicet novem ad tria, duodecim ad quatuor, triginta ad decem, & trium ad unum, per ſe mutuo multiplicari; non autem ad ſe invicem addi, ut mera fiat aggregatio rationum; duplicata igitur ratio non eſt ratio ſimpliciter tripla, ſed multiplicata per triplam, & ratio triplicata ſignificat rationem quæ naſcitur ex denominatorum multiplicatione bis* (lege, *ter*) *factâ, atque ita deinceps.* Hæc ita cenſuit Euthymius. Primum, dum dicit, duos rationes componendi modos adſignari poſſe: quorum alterum deinde additionem vocat; alterum, multiplicationem: quid vocabulum *compoſitio* ſignificet, ignoravit. Antiquis autem omnibus compoſitio, *σύνθεσις*, id ſignificat, quod junioribus Latinis *additio*. *συντιθέναι*, *componere* illis idem, quod nunc vulgo *addere*. Nec hîc diſputabo, quanto illud mihi concinnius vocabulum videatur: id ſolùm dicam, antiquorum nullum dixiſſe, quadratum, aut rectangulum, compoſitum eſſe ex duobus lateribus. nam verbum *conſtituere*, *συστήσασθαι*, uſurpaſſent; quemadmodum Euclides ex tribus rectis lineis triangulum conſtitui, non autem componi, dicit. Una igitur eſt rationis vera compoſitio, quam illa definitione Euclides tradidit.

Huic autem juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam conſideraſſent, adeoque, quid ratio eſſet, ignorarent, monſtroſam, & contra naturæ decreta natam, rationis compoſitionem adjunxerunt. Nullum enim in natura, aut Geometricis, fundamentum vel uſum illa rationis compoſitio habet, qua ratio noncupla ex dupla, tripla & quadrupla compoſita dicitur; quod non rationes illæ conjungantur, ſed illarum termini antecedentes. Cæterum quam ob cauſam in Euclideâ rationum compoſitione multiplicatio adhibeatur, ex iis, quæ ſuprà multis diſſerui, liquere poteſt. Illud quoque ex iis planum eſt, ex quatuor Arithmeticis operationibus duas tantùm in rationum doctrina adhiberi poſſe; additionem nimirum & ſubtractionem. Multiplicatio enim & diviſio; quas ferme ut compendiariam additionem & ſubtractionem abſolutorum numerorum ſcientia contemplatur; naturæ invidiâ, non parvo noſtro incommodo, in rationum doctrina ignorantur. Itaque ratio per rationem multiplicari nequit; multo minus per numerum, aut magnitudinem multiplicabitur. Neque enim, ſi ratio $\frac{2}{1}$, quæ dia paſon intervallum in Canonicis efficit, per numerum 3 multiplicetur, inde prodit ter dia paſon intervallum, $\frac{8}{1}$; ſed intervallum bis dia paſon & dia pente, in ratione $\frac{6}{1}$ ſpectatum. Denique & hoc de rationum compoſitione adnotabimus, ex doctrina noſtra deductum; poſitis quotcunque magnitudinibus, aut numeris, ut 8. 4. 2. 6. rationem primi ad ultimum, 8 ad 6, compoſitam eſſe ex rationibus mediorum, 8 ad 4, & 4 ad 2, & 2 ad 6: quemadmodum

numerus 3 componitur ex numeris $+5+4-6$. Sed eadem quoque ratio 8 ad 6 ex innumeris aliis intermediis rationibus compoſita eſſe poteſt: ſicut ex innumeris aliis numeris, exceſsivis & defectivis conjunctim ſumtis, numerus 3 conſtituetur. Unde Clavii argumentis quæ IX.^ni libri adpendice expoſuit, facile reſpondetur. His autem breviter ita repetitis falſa eſt Gregorii

Propoſitio I.^ma *Quarumvis rationum poſsibile eſt denominatores exhibere.* Æque enim poſsibile cenſet Euthymius, & ſuprà demonſtravit, quarumvis, adeoque diverſæ progreſsionis, rationum denominatores exhibere, quæ ſecundum Gregorii definitionem ſecundam oſtendant, quam rationem habeat ratio ad rationem; atque facile eſt numeris explicare, quam rationem habeat quadrati diameter ad ſuum latus. In hujus autem propoſitionis demonſtratione inconſiderate poſuit hæc verba: *ita etiam rectæ lineæ exhiberi poſſunt, quæ oſtendant quanto una proportio major ſit vel minor quàm altera.* quæ, contra ipſius mentem, quam ad definitionem ſecundam, pag. 868. v. 17. & in omnium propoſitionum verbis expreſsit, de differentiali ratione loquuntur, quam nulla hæſitatione ubique exhibemus. Cum enim dicit, rationem $\frac{A}{B}$ eſſe ad rationem $\frac{C}{D}$, ut eſt linea E ad lineam F; ſeu, rationem $\frac{8}{3}$ eſſe ad rationem $\frac{8}{6}$, ut 6 ad 3; hoc ſignificat, rationem $\frac{8}{3}$ hujuſmodi duas rationes continere, cujuſmodi unam ratio $\frac{8}{6}$: non autem vult, rationem $\frac{8}{3}$ ſuperare rationem $\frac{8}{6}$, ratione numeri 6 ad 3, hoc eſt, duplâ. Similiter, cum rationem $\frac{9}{4}$ ad rationem $\frac{6}{4}$ eſſe dicit ut 9 ad 6; illam nempe hujus ſeſquialteram; illud innuere debet,

rationem $\substack{9\\4}$ hujuſmodi tres æquare rationes, cujuſmodi duas æquat ratio $\substack{6\\4}$: non autem intelliget, rationem $\substack{9\\4}$ ſuperare rationem $\substack{6\\4}$, ratione $\substack{9\\6}$. de quo nullus unquam dubitavit. Veræ igitur ſunt omnes illius propoſitiones, quibus rationum proportionem demonſtrare conatur, de differentiali ratione, qua una ſuperat alteram. quod propoſito ipſius adverſatur.

Propoſitio II.[da] *Duæ rationes habentes commune conſequens, eam ſortiuntur rationem quæ inter antecedentes terminos reperitur.* Ut ratio $\substack{A\\B}\substack{9\\4}$, ad rationem $\substack{C\\B}\substack{6\\4}$; ita prioris rationis antecedens $\substack{A\\9}$, ad poſterioris rationis antecedentem $\substack{C\\6}$. falſa eſt: ſed de differentiali ratione, vera. Ex hac autem propoſitione; quod admodum abſurdum eſt; etiam quævis ratio ad rationem nihili, habebit rationem, quam antecedens ad antecedentem: $\substack{A\\B}\substack{4\\4}.\ \substack{C\\B}\substack{6\\4} : \substack{A\\4}\substack{C\\6}.$ Quod idem eſt ac ſi numerum rationem habere dicerem ad nihilum, ſeu ſiphram, o. Superat autem ratio $\substack{6\\4}$ rationem $\substack{4\\4}$, ratione $\substack{6\\4}$; quemadmodum numerus 3 ſuperat nullum o, ipſo 3.

Propoſitio III. falſa. Ut $\substack{A\\D}\substack{9\\2}$ ad $\substack{C\\D}\substack{6\\2}$; ita $\substack{A\\B}\substack{9\\4}$ ad $\substack{C\\B}\substack{6\\4}$. vera autem de differentiali ratione $\substack{9\\6}$, quâ ratio $\substack{9\\2}$ ſuperat rationem $\substack{6\\2}$; & ratio $\substack{9\\4}$, rationem $\substack{6\\4}$.

Propoſitio IV falſa eſt, quod hujuſmodi rationum proportio in rerum natura nobis ignoretur. $\substack{A\\B}\substack{9\\4}.\ \substack{C\\B}\substack{6\\4} : \substack{D\\B}\substack{3\\4}.\ \substack{E\\B}\substack{2\\4}.$

Propoſitio V, falſa. Ut $\substack{A\\B}\substack{9\\4}$ ad $\substack{C\\B}\substack{6\\4}$; ita $\substack{D\\F}\substack{3\\3}$ ad $\substack{E\\F}\substack{2\\3}$.

Propoſitio VI, falſa. $\substack{A\\B}\substack{6\\9}.\ \substack{C\\D}\substack{2\\3}.\ |\ \substack{E\\B}\substack{4\\9}.\ \substack{C\\D}\substack{2\\3} : \substack{E\\4}.\ \substack{A\\6}.$

Propoſitio VII, falſa. $\substack{A\\B}\substack{2\\3}.\ \substack{A\\C}\substack{2\\6} : \substack{C\\6}.\ \substack{B\\3}.$

Propoſitio VIII; quæ cum IX.[na] propoſitione libri

V^ti Elementorum convenientiam habet; vera eſſet, ſi rationum illa proportio in natura fundamentum haberet.

Propoſitio IX, falſa. Ut $\frac{A\,9}{B\,4}$ ad $\frac{C\,9}{D\,6}$; ita $\frac{D}{6}$ ad $\frac{B}{4}$.

Propoſitio X, falſa. $\frac{A\,9}{B\,4}.\frac{A\,9}{C\,6} : \frac{A\,9}{D\,2}.\frac{A\,9}{E\,3}$.

Propoſitio XI, falſa. $\frac{A\,9}{C\,6}.\frac{A\,9}{D\,4} : \frac{B\,8}{C\,6}.\frac{B\,8}{D\,4}$. de differentiali autem ratione, vera: quippe rationem $\frac{9}{6}$ ſuperat ratio $\frac{9}{4}$ ratione $\frac{9}{6}$; quâ etiam rationem $\frac{8}{6}$ ſuperat ratio $\frac{8}{4}$.

Propoſitio XII, falſa. $\frac{A\,9}{B\,8}.\frac{A\,9}{C\,6} : \frac{C\,6}{A\,9}.\frac{B\,8}{A\,9}$.

Propoſitio XIII, falſa. $\frac{A\,10}{B\,9}.\frac{C\,8}{D\,6} \,\Big|\, \frac{D}{6}.\frac{C}{8} : \frac{B}{9}.\frac{E}{12} \,\Big|\, \frac{A}{10}$ & $\frac{E}{12}$ ſunt denominatores, ſeu quantitates, rationum $\frac{10}{9}.\frac{8}{6}$. Superat autem rationem $\frac{10}{9}$ ratio $\frac{8}{6}$, ratione $\frac{12}{10}$.

Propoſitio XIV, falſa. $\frac{A\,3}{B\,2}.\frac{C\,9}{D\,6} \,\Big|\, \frac{C}{9}.\frac{D}{6} : \frac{A}{3}.\frac{E}{2}$. Rationum $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}$ denominatores ſunt $\frac{E}{2}$ & $\frac{B}{2}$. Superat autem ratio $\frac{3}{2}$ rationem $\frac{9}{6}$, ratione $\frac{E\,2}{B\,2}$.

Propoſitio XV, falſa. $\frac{A\,9}{B\,6}.\frac{C\,4}{D\,4} : \frac{A}{9}.\frac{B}{6} \,\Big|\, \frac{C\,4}{D\,4}.\frac{A\,9}{B\,6} : \frac{B}{6}.\frac{A}{9}$

Propoſitio XVI, falſa. $\frac{A\,9}{B\,6}.\frac{C\,4}{C\,4} : \frac{A\,9}{C\,4}.\frac{B\,6}{C\,4} \,\Big|\, \frac{C\,4}{C\,4}.\frac{A\,9}{B\,6} : \frac{C\,4}{A\,9}.\frac{C\,4}{B\,6}$

Ex nova autem Euthymii doctrina, ratio defectiva $\frac{4}{9}$ major eſt ratione defectivâ $\frac{4}{6}$. Uti igitur ratio exceſsiva $\frac{9}{6}$ ſuperat rationem nihili $\frac{4}{4}$ ſui quantitate, nempe ratione $\frac{9}{6}$; ita ratio defectiva $\frac{4}{9}$, eadem ratione $\frac{6}{9}$ ſuperat rationem $\frac{4}{6}$.

Propoſitio XVII, falſa. $\frac{C\,4}{A\,9}.\frac{C\,4}{B\,6} : \frac{B\,6}{C\,4}.\frac{A\,9}{C\,4}$.

Propoſitio XVIII, falſa. Neque enim ratio $\frac{A\,3}{B\,2}$ ad rationem $\frac{B\,2}{A\,3}$ eſt in dupla ratione ipſius $\frac{A}{3}$ ad $\frac{B}{2}$, id eſt, ut 9 ad 4: ſed ſuperat ratio $\frac{3}{2}$ rationem $\frac{2}{3}$, ratione $\frac{9}{4}$.

Propoſitio XIX, falſa. $\frac{A}{9}.\frac{B}{6}.\frac{C}{4} \,\Big|\, \frac{D}{16}.\frac{E}{8}.\frac{C}{4} \,\Big|\, \frac{A\,9}{D\,16}.\frac{B\,6}{E\,8} : \frac{B}{6}.\frac{E}{8}$. Superat ratio $\frac{9}{16}$ rationem $\frac{6}{8}$, ſeu $\frac{12}{16}$, ratione $\frac{9}{12}$.

Propoſitio XX eſt vera: quod vero Euclidis elemento nitatur.

Propoſitio XXI eſt falſa. quod ratio $\frac{A\ 9}{B\ 6}$ non ſit ad rationem $\frac{C\ 4}{D\ 4}$, ut $\frac{A}{9}$ ad $\frac{B}{6}$. aut $\frac{C\ 4}{D\ 4}$ ad $\frac{A\ 9}{B\ 6}$, ut $\frac{B}{6}$ ad $\frac{A}{9}$.

Propoſitio XXII falſa eſt, cum exceſsiva ratio comparatur cum defectiva. ut cum ratio exceſsiva $\frac{A\ 6}{B\ 2}$ major dicitur, ex Euclidis elementis, quâm ratio defectiva $\frac{1}{6}$; quamvis revera hæc in genere defectivo major ſit quàm illa in exceſsivo.

Propoſitio XXIII, falſa. $\frac{A\ 27}{B\ 18}.\ \frac{D\ 8}{C\ 12} : \frac{A}{27}.\ \frac{C}{12}.$ Differunt hæ duæ rationes ratione $\frac{27}{12}$.

Propoſitio XXIV, falſa. $\frac{A\ 9}{B\ 6}.\ \frac{C\ 16}{D\ 12}\ \Big|\ \frac{D}{12}.\ \frac{C}{16} : \frac{B}{6}.\frac{E}{8}.\ \Big|$ Ergo ut $\frac{A\ 9}{B\ 6}.\ \frac{C\ 16}{D\ 12} : \frac{A}{9}.\ \frac{E}{8}.\ \Big|\ \frac{F}{4}.\ \Big|$ Quæſitæ rationes ſunt $\frac{A\ 9}{F\ 4}.\ \frac{E\ 8}{F\ 4}.$ quæ eadem ratione $\frac{9}{8}$ inter ſe differunt, quâ rationes $\frac{9}{6}.\ \frac{16}{12}.$

Propoſitio XXV, falſa. $\frac{A\ 6}{C\ 3}.\ \frac{B\ 4}{C\ 3} : \frac{A}{6}.\ \frac{B}{4}.$ Ea ratione inter ſe diſtant. Belle autem II.da & VII.ma hîc conjunguntur. Similiter ſequentes ſeptem propoſitiones falſæ ſunt; ſed de differentiali ratione veræ. Exempla tamen adſcribam.

Propoſitio XXVI, falſa. $\frac{C\ 8}{D\ 9}.\ \frac{E\ 2}{F\ 3} : \frac{A}{16}.\ \frac{B}{12}.$

Propoſitio XXVII, falſa. $\frac{D\ 8}{E\ 6}.\ \frac{F\ 2}{G\ 4} : \frac{D}{8}.\ \frac{H}{3}.$

Propoſitio XXVIII, falſa. $\frac{I\ 3}{K\ 6}.\ \frac{L\ 9}{M\ 8} : \frac{A}{4}.\ \frac{B}{9}.$

Propoſitio XXIX, falſa. $\frac{C\ 16}{G\ 4}.\ \frac{D\ 10}{E\ 5} : \frac{A}{12}.\ \frac{B}{6}.$

Propoſitio XXX, falſa. $\frac{E\ 16}{C\ 12}.\ \frac{G\ 8}{D\ 10} : \frac{A}{5}.\ \frac{B}{3}.$

Propoſitio XXXI, falſa. $\frac{A\ 6}{B\ 3}.\ \frac{E\ 2}{F\ 5} : \frac{C}{5}.\ \frac{D}{1}.$

Propoſitio XXXII, falſa. $\frac{E\ 9}{G\ 6}.\ \frac{G\ 6}{E\ 9} : \frac{A}{18}.\ \frac{B}{8}.$

Propoſitio XXXIII, falſa eſt, quod ratio rationis $\frac{A\ 1}{B\ 2}$ ad rationem $\frac{C\ 3}{D\ 1}$ in natura ignoretur. Ita loqui debuiſſet: ratio differentialis $\frac{6}{1}$, qua ratio $\frac{C\ 3}{D\ 2}$. ſuperat rationem $\frac{A\ 1}{B\ 2}$, compoſita eſt ex ratione $\frac{A\ 1}{B\ 3}$, & ratione $\frac{D\ 2}{B\ 2}$. Ratio autem compoſita eſſe poteſt ex aliis rationibus, in infinitum

variis, & innumeris; quemadmodum quivis ſimplex numerus ex infinitis & diverſis partibus.

Propoſitio XXXIV eadẽ eſt, & falſa: non ob rationis compoſitionem, quę in hac, ut & præcedente, vera eſt; ſed ob rationũ rationẽ, quæ nulla eſt. ſeu, tantùm differentia.

Propoſitio XXXV falſa eſt, quia duarum rationum denominatores, quo ille putat modo, duabus lineis exhiberi nequeunt.

Propoſitio XXXVI, falſa. $\frac{A\ 4}{B\ 5} \cdot \frac{C\ 2}{D\ 1} : \frac{E\ 8}{F\ 10} \cdot \frac{G\ 4}{H\ 2}$. differunt autem binæ ac binæ ratione $\frac{1}{2}$. Similiter falſæ ſunt ſequentes: XXXVII. XXXVIII. XXXIX. XL. XLI. XLII. XLIII. XLIV. XLV. XLVI. VLVII. XLVIII. XLIX. L. LI. LII. LIII. LIV. LV. LVI. LVII. LVIII. LIX. LX. LXI. LXII. LXIII. LXIV. LXV. LXVI. LXVII. LXVIII. LXIX. LXX LXXI. LXXII. quarum exempla non difficulter quivis adponet.

Propoſitio LXXIII, falſa. $\frac{A\ 9}{B\ 6}$ major eſt quàm $\frac{C\ 4}{D\ 3}$. quævis $\frac{E\ 2}{F\ 1}$. Si vel rationum illa ratio in natura fundamentum haberet, falſum eſſet ex Euthymii doctrina, quod ratio $\frac{A\ 9}{B\ 6}$ ad rationem $\frac{E\ 2}{F\ 1}$, majorem habeat rationem quàm ratio $\frac{C\ 4}{D\ 3}$ ad rationem $\frac{E\ 2}{F\ 1}$. majore enim ratione inter ſe diſtant rationes $\frac{C\ 4}{D\ 3}$ & $\frac{E\ 2}{F\ 1}$, quàm rationes $\frac{A\ 9}{B\ 6}$ & $\frac{E\ 2}{F\ 1}$. Falſa quoque eſt propoſitio LXXIV.

Rationum multiplicationem, & diviſionem, in rerum natura â nobis ignorari, ſuprà eſt oſtenſum. Sequentes autem propoſitiones, de rationum compoſitione, ſeu additione; quæ fit terminis inter ſe multiplicatis, ſunt intelligendæ. Quare propoſitio LXXV his verbis enunçianda eſſet: *Data ſint rationes* $\frac{A}{B}$ *&* $\frac{C}{D}$. *Fiat, ut C ad D, ita B ad E. Dico rationes* $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ *compoſitas* (ſeu, *additas*) *efficere rationem* $\frac{A}{E}$. Similiter ſequentes ſunt reformandæ.

Propoſitio LXXXI eſt falſa. Ratio $\frac{A\ 8}{B\ 3}$ ſuperat rationem $\frac{C\ 2}{D\ 3}$, ratione $\frac{8}{2}$; quæ etiam ex additis rationibus $\frac{A\ 8}{B\ 3}$, $\frac{D\ 3}{C\ 2}$ conficitur. Similiter falſæ ſunt, LXXXIV. LXXXVI. LXXXVII.

Propoſitio XCIV falſa eſt, ſed inter novæ ipſius de proportionibus doctrinæ elementares numeranda: ideoque adponenda: *Datæ ſint IV rationes,* $\frac{A\ 24}{B\ 8}$, $\frac{C\ 6}{D\ 2}$, $\frac{E\ 4}{F\ 12}$, $\frac{G\ 1}{H\ 3}$. *ſi rationes* $\frac{A\ 24}{B\ 8}$, *&* $\frac{G\ 1}{H\ 3}$, *inter ſe multiplicatæ idem producant, quod rationes* $\frac{C\ 6}{D\ 2}$, $\frac{E\ 4}{F\ 12}$, *multiplicatæ inter ſe: Dico rationem* $\frac{A\ 24}{B\ 8}$, *eſſe ad rationem* $\frac{C\ 6}{D\ 2}$, *ut ratio* $\frac{E\ 4}{F\ 12}$ *eſt ad rationem* $\frac{G\ 1}{H\ 3}$. Utrobique autem ex illa multiplicatione prodit ratio $\frac{24}{24}$. Idem hoc in quintæ propoſitionis exemplo, & multis aliis perſpicitur: $\frac{9}{4}.\frac{6}{4}::\frac{3}{3}.\frac{2}{3}$. De differentiali autem ratione, qua una ratio ſuperat alteram hæc, ut pleræque omnes, vera exiſtit.

Propoſitiones XCV. XCVI. XCVII ſunt falſæ.

Propoſitio XCIX, falſa. Uti rectangulum $\frac{A}{D}$ 8, ad rectangulum $\frac{B}{C}$ 3, ita ratio $\frac{A\ 2}{B\ 1}$, ad rationem $\frac{C\ 3}{D\ 4}$. Nec dici poteſt: ut 8 ſuperat 3, quinario; ſic ratio $\frac{2}{1}$ ſuperat rationem $\frac{3}{4}$ ratione aliqua quinquies ſumta. Superat autem ratio $\frac{2}{1}$ rationem $\frac{3}{4}$, ratione inter rectangulorum illorum quantitates ſpectatâ.

Propoſitio CI, falſa. ut & CII. CIII. CXIII.

Propoſitio CXIV, Arithmeticam rationum additionem tradens, falſa eſt, & multarũ parens. $\frac{AC}{7}.\frac{D}{2}\ \frac{AB}{4}.\frac{BC}{3}.$ | ratio $\frac{AB}{4}$ ad $\frac{D}{2}$, unà cum ratione $\frac{BC}{3}$ ad $\frac{D}{2}$, æqualis eſt rationi $\frac{AC}{7}$ ad $\frac{D}{2}$.

Propoſitio CXVII, falſa in primis. ut & CXVIII. CXIX. CXXI. CXXII. CXXIII. CXXV. CXXVI. CXXVII. CXXXI. CXXXII. CXXXIII. CXXXVIII. CXXXIX. CXL. CXLI. CXLII. CXLIII. CXLIV. CXLV. CXLVI. CXLVII. CXLVIII. CLI. CLIII. CLXI. CLXII. CLXIII. CLXIV. CLXV. CLXX.

Falſæ igitur ſunt in octavo de Quadratura Circuli libro propoſitiones CXVII. quibus ex libro decimo XVII adjungemus ; ut falſarum propoſitionum, & quidem elementarium, numerus excreſcat ad CXXXIV.

Propoſitio I.ma pag. 1100, ex Euthymii doctrina, falſa eſt; recte tamen ex octava quinti Elementorum deducta. $\frac{A}{B}\frac{2}{3}.\frac{C}{6}.$ ratio $\frac{A}{2}$ ad $\frac{B}{3}+\frac{C}{6}$, ſeu 9, major defectiva eſt, quàm ratio $\frac{A}{B}\frac{2}{3}$.

Propoſitio II, falſa. ut & III. IV. V. VI. VII. VIII. XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII. XXXIX. XL. LIV. Cæteras, in quibus demonſtrandis has falſas elementares uſurpavit, operoſe recenſere nolui, quod rerum Geometricarum gnarus ſciat, cum fundamento male jacto ruere quidquid ipſi fuerit ſuperſtructum. Nec ita omnia ipſius nova inventa cenſui, ut adfirmare ſuſtineam, nullum cuiquam ſpicilegium eſſe relictum. Suffeciſſet, duas tres falſas propoſitiones expoſuiſſe, quibus deinde cæteræ nitantur. Hoc autem maxime animadverſione dignum, non tantum falſa hæc Gregorii theoremata, ſed & omnes veterum ac juniorum paralogiſmos, in quibus recenſendis hactenus occupatus fui, ex eo fonte manaſſe, quod Geometricas rationes, & minutias Arithmeticas eandem contemplationem admittere putarent. Vera enim eſt in minutiis ſpectata Gregorii propoſitio II. minutiam $\frac{9}{4}$ imperialis, ad minutiam $\frac{6}{4}$ imperialis; ſeu 108 ſolidos Lubecenſes ad ſolidos 72, eſſe ut 9 ad 6. Vera propoſitio III. ut $\frac{9}{2}$ imperialis ad $\frac{6}{2}$, ita $\frac{9}{4}$ ad $\frac{6}{4}$; ſeu, ut ſolidi 216 ad 144, ita eſſe 108 ad 72. Vera propoſitio XCIV. nempe minutiam $\frac{6}{2}$ multiplicatam per minutiam $\frac{4}{12}$ eandem minutiam $\frac{24}{24}$ producere, quam minutia $\frac{24}{2}$ multiplicata per minutiam $\frac{1}{3}$. Atque hîc, cùm

in multam noctem diſſertationem extraxiſſet, loquendo feſſus ſubſtitit Euthymius. Ego autem, cum plura audîſſem, quàm ab ullo Geometra expectari poſſe putarem, inventionum novitate ac magnitudine impulſus, omnes cogitationes meas in examinandis Euthymii elementis defixi: præclarum laboris præmium ratus, ſi ejus diſciplinæ, quam ſapiens ac veneranda antiquitas certiſsimam judicaſſet, veritatem vel ipſe defendere, vel ab aliis adſertam poſſem percipere; inexpectatum verò, ſi veterum inventis majore veritatis luce obſcuratis, animum, diſcendi ſtudio incenſum, veris ſententiis colluſtrare poſſem. Cæterum humanæ in judicando imbecillitatis mihi conſcius, cum diviniores quaſque animas ad illa examinanda exorandas ſtatuerem, vos, illuſtres Geometræ, novo more, conſulere decrevi: quos etiam in ſuum præjudicium, ſi ita veritas & rei evidentia ſuaderent, pronunciaturos ſcirem. Eucl. Majora quàm ullus noſtrûm expectaſſet, narrando evincens, immortalem inventionis gloriam Euthymio comparâſti. Archim. Hoc tandem omnes vos judicaturos prævidebam. Hermot. Felix fauſtumque veritati, & diſciplinis Mathematicis, judiciũ veſtrum voveo; quo, immenſum quantum, Euthymius exhilarabitur, qui inventionis ſuæ ingens præmium ſe relaturum judicavit, ſi magnorum virorum judiciis animatus exclamare poſſet, *εὕρηκα*.

FINIS.